PROBLEMAS SOBRE LA TEORIA DE FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA

L. VOLKOVYSKI G. LUNTS
I. ARAMANOVICH


ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИР

Л. И. ВОЛКОВЫСКИЙ, Г. Л. ЛУНЦ,
И. Г. АРАМАНОВИЧ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

ИЗДАТЕЛЬСТВО „НАУКА“
МОСКВА

PROBLEMAS SOBRE LA TEORIA DE FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA

L. I. VOLKOVYSKI, G. L. LUNTS,
I. G. ARAMANOVICH

Segunda edición

Traducido del ruso por
CARLOS VEGA,
catedrático
de Matemáticas Superiores

EDITORIAL MIR MOSCU

Impreso en la URSS

На испанском языке

INDICE

CAPÍTULO IV

SERIE DE LAURENT.
PUNTOS SINGULARES DE FUNCIONES ANALÍTICAS UNIFORMES.
RESIDUOS Y SUS APLICACIONES

CAPÍTULO V

DISTINTAS SERIES DE FUNCIONES.
INTEGRALES PARAMÉTRICAS

CAPÍTULO VI

PRODUCTOS INFINITOS.
FUNCIONES ENTERAS Y MEROMORFAS

CAPÍTULO VII

INTEGRALES DE TIPO DE CAUCHY.
FÓRMULAS INTEGRALES DE POISSON Y DE SCHWARZ

CAPITULO VIII

PROLONGACIÓN ANALÍTICA. SINGULARIDADES DE CARÁCTER MULTIFORME. SUPERFICIES DE RIEMANN

CAPITULO IX

TRANSFORMACIONES CONFORMES (CONTINUACIÓN)

CAPITULO X

APLICACIONES A LA MECÁNICA Y A LA FÍSICA

CAPITULO XI

GENERALIZACIÓN DE FUNCIONES ANALÍTICAS

PROLOGO DE LOS AUTORES A LA EDICION ESPAÑOLA

El libro "Problemas sobre la teoria de funciones de variable compleja" (TFVC) está destinado principalmente para los estudiantes de la Facultades de Mecánica y Matemáticas y de Física y Matemáticas de las Universidades, de las secciones correspondientes de los institutos pedagógicos y de los institutos politécnicos con un programa ampliado de matemáticas. Los "Problemas" contienen así mismo ciclos que se salen de los marcos de los programas. Algunos de ellos pueden servir de base para los trabajos de curso y como material para las labores de los seminarios de la TFVC.

Los autores estiman también que los "Problemas" pueden resultar útiles para personas que se especializan en la mecánica de medios continuos (hidrodinámica, teoría de elasticidad) y en electrotecnia, ya que contienen un número considerable de problemas o bien dedicados a la aplicación directa de la TFVC a estas ramas o bien relacionados con cuestiones que representan los fundamentos matemáticos de las mismas (transformaciones conformes, funciones armónicas, potenciales, integrales de tipo de Cauchy, etc.).

Para mayor comodidad en el uso de los "Problemas", en el índice, además de los títulos de los capítulos y parrágrafos, se señalan a veces los ciclos principales de problemas que éstos contienen (esto se refiere principalmente al material fundamental de estudio).

Se supone que el que recurra a los "Problemas" está familiarizado con los capítulos correspondientes de la TFVC. Si se emplea material adicional, se da la información necesaria y se hace referencia a la bibliografía. Para los libros que se mencionan con mayor frecuencia se emplea la siguiente numeración:

1 — А. И. Маркушевич, Теория аналитических функций, изд. 2-е, т. 1, 1967, т. 2, 1968, «Наука» (Markushévich A. I., Teoría de las funciones analíticas, vol. 1 y 11).

2 — М. А. Лаврентьев и Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, изд. 2-е, Физматгиз, 1965 (Lavréntiev M. A. y Shabat B. V., Métodos de la teoria de funciones de variable compleja).

El primero de estos libros ha sido traducido recientemente al español por la editorial "Mir"[1] lo que sin duda facilitará a nuestros lectores el uso de los "Problemas".

Todas las sugerencias a la solución de los problemas se dan en el texto principal. Los problemas más difíciles, cuyos números están marcados con asterisco, están provistos de soluciones que se insertan en las respuestas.

Al preparar los "Problemas" se han empleado textos, manuales y monografías, tanto rusos, como extranjeros, que estaban al alcance de los autores.

Nos es sumamente grato que a la versión inglesa ya existente de nuestros "Problemas" se una ahora esta traducción al español, idioma ampliamente extendido.

Aprovechamos esta ocasión para agradecer nuestro colega, C. Vega, por la labor atenta que ha realizado al traducir nuestro libro.

Los autores

---

[1] *Markushévich A. I.*, Teoría de las funciones analíticas, vol. I y II, Editorial Mir, Moscú, 1970.

CAPITULO I

NUMEROS COMPLEJOS Y FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA

En este capítulo, así como en todo este libro en general, siempre que no se diga lo contrario se emplean las notaciones: $z=x+iy=re^{i\varphi}$, $w=u+iv=\rho e^{i\theta}$ (x, y, u, v, r, ρ, φ y θ son números reales, $r\geqslant 0$, $\rho\geqslant 0$); $\operatorname{Re} z=x$, $\operatorname{Im} z=y$, $\operatorname{Arg} z=\varphi$, $|z|=r$, $\bar{z}=x-iy$. Si no se hacen indicaciones adicionales, el valor principal del argumento $\arg z$ se define mediante las desigualdades $-\pi<\arg z\leqslant\pi$; el plano complejo cuyos puntos representan los números complejos z, se llamará z-plano; los términos "número complejo z" y "punto z" se emplean comúnmente como sinónimos.

§ 1. NUMEROS COMPLEJOS

NÚMEROS COMPLEJOS. REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA

1. Realice las operaciones indicadas:

1) $\frac{1}{i}$; 2) $\frac{1-i}{1+i}$; 3) $\frac{2}{1-3i}$; 4) $(1+i\sqrt{3})^3$.

2. Encuentre los módulos y los argumentos de los números complejos (a y b son números reales):

1) $3i$; 2) -2; 3) $1+i$; 4) $-1-i$; 5) $2+5i$; 6) $2-5i$;
7) $-2+5i$; 8) $-2-5i$; 9) $bi\,(b\neq 0)$; 10) $a+bi\ (a\neq 0)$.

3. Resuelva la ecuación $\bar{z}=z^{n-1}$ (donde $n\neq 2$ es un número natural).

4. Halle todos los valores de las siguientes raíces y constrúyalos:

1) $\sqrt[3]{1}$; 2) $\sqrt[3]{i}$; 3) $\sqrt[4]{-1}$; 4) $\sqrt[6]{-8}$; 5) $\sqrt[8]{1}$;
6) $\sqrt{1-i}$; 7) $\sqrt{3+4i}$; 8) $\sqrt[3]{-2+2i}$; 9) $\sqrt[5]{-4+3i}$.

5. Demuestre que ambos valores de $\sqrt{z^2-1}$ se encuentran sobre la recta que pasa por el origen de coordenadas y es paralela a la bisectriz del ángulo interior del triángulo con vértices en los puntos -1, 1 y z, trazada por el vértice z.

6. Sean m y n dos números enteros. Demuestre que $(\sqrt[n]{z})^m$ toma $n/(n, m)$ diferentes valores, donde (n, m) es el máximo común divisor de los números m y n. Compruebe que los conjuntos de valores de $(\sqrt[n]{z})^m$ y de $\sqrt[n]{z^m}$ coinciden, si, y sólo si, $(n, m) = 1$, es decir, si n y m son primos entre sí.

7. Demuestre las siguientes desigualdades partiendo de consideraciones geométricas:

1) $|z_1+z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|$; 2) $|z_1-z_2| \geqslant ||z_1|-|z_2||$.

Demuestre estas mismas desigualdades algebraicamente. Explique en cada caso cuándo tiene lugar el signo de igualdad.

8. Demuestre las siguientes desigualdades partiendo de consideraciones geométricas

1) $\left|\frac{z}{|z|}-1\right| \leqslant |\arg z|$; 2) $|z-1| \leqslant ||z|-1|+|z||\arg z|$.

9. Demuestre la identidad

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$$

y explique su significado geométrico.

10. Demuestre la identidad

$$|1-\bar{z}_1z_2|^2-|z_1-z_2|^2=(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2).$$

11. Demuestre la desigualdad

$$|z_1+z_2| \geqslant \frac{1}{2}(|z_1|+|z_2|)\left|\frac{z_1}{|z_1|}+\frac{z_2}{|z_2|}\right|.$$

12. Sean z_1 y z_2 dos números complejos arbitrarios y sean a_1 y a_2 dos números reales $(a_1^2+a_2^2 \neq 0)$. Demuestre las desigualdades

$$|z_1|^2+|z_2|^2-|z_1^2+z_2^2| \leqslant 2\frac{|a_1z_1+a_2z_2|^2}{a_1^2+a_2^2} \leqslant |z_1|^2+|z_2|^2+|z_1^2+z_2^2|.$$

Sugerencia. Introduzca el ángulo auxiliar α de manera que $\operatorname{tg}\alpha=a_1/a_2$, represente la expresión estimada en la forma $A+B$ sen $2\alpha+C$ cos 2α y halle sus valores máximo y mínimo.

13. Demuestre las identidades

1) $(n-2)\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k|^2+\left|\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\right|^2=\sum\limits_{1 \leqslant k<s \leqslant n}|a_k+a_s|^2$;

2) $n\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k|^2-\left|\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\right|^2=\sum\limits_{1 \leqslant k<s \leqslant n}|a_k-a_s|^2$.

14. Demuestre que:

1) Si $z_1+z_2+z_3=0$ y $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$, los puntos z_1, z_2 y z_3 son vértices de un triángulo equilátero inscrito en la circunferencia unidad.

2) Si $z_1+z_2+z_3+z_4=0$ y $|z_1|=|z_2|=|z_3|=|z_4|$, los puntos z_1, z_2, z_3 y z_4 o bien son vértices de un rectángulo o bien coinciden de dos en dos.

15. Encuentre los vértices de un polígono regular de n lados, si su centro se encuentra en el punto $z=0$ y uno de sus vértices z_1 es conocido.

16. Sean z_1 y z_2 dos vértices adyacentes de un polígono regular de n lados. Encuentre el vértice z_3 adyacente a z_2 $(z_3 \neq z_1)$.

17. Dados tres vértices z_1, z_2 y z_3 de un paralelogramo, halle su cuarto vértice z_4 opuesto al vértice z_2.

18. ¿Bajo qué condición tres puntos z_1, z_2 y z_3, distintos dos a dos, estarán sobre una misma recta?

19. ¿Bajo qué condición cuatro puntos z_1, z_2, z_3 y z_4, distintos dos a dos, estarán sobre una misma circunferencia o sobre una misma recta?

20*. Los puntos $z_1, z_2, \ldots, z_n$ se encuentran a un mismo lado de una recta que pasa por el origen de coordenadas. Demuestre que los puntos $1/z_1, 1/z_2, \ldots, 1/z_n$ verifican la misma propiedad (indique respecto a qué recta) y que

$$z_1+z_2+\ldots+z_n \neq 0; \quad \frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\ldots+\frac{1}{z_n} \neq 0.$$

21. Demuestre que, si $z_1+z_2+\ldots z_n=0$, cualquier recta que pase por el origen de coordenadas separa los puntos $z_1, z_2, \ldots z_n$, siempre que estos puntos no se hallen sobre dicha recta.

22. Demuestra que cualquier recta que pase por el centro de gravedad de un sistema de puntos materiales $z_1, z_2, \ldots z_n$ provistos de masas $m_1, m_2, \ldots m_n$ separa estos puntos, siempre que no se hallen sobre dicha recta.

Explique el significado geométrico de las relaciones indicadas en los problemas 23—34.

23. $|z-z_0|<R$; $|z-z_0|>R$; $|z-z_0|=R$.

24. $|z-2|+|z+2|=5$; **25.** $|z-2|-|z+2|>3$.

26. $|z-z_1|=|z-z_2|$. **27.** 1) $\operatorname{Re} z \geqslant C$; 2) $\operatorname{Im} z<C$.

28. $0<\operatorname{Re}(iz)<i$.

29. $\alpha<\arg z<\beta$; $\alpha<\arg(z-z_0)<\beta$ $(-\pi<\alpha<\beta\leqslant\pi)$.

30. $|z|=\operatorname{Re} z+1$. **31.** $\operatorname{Re} z+\operatorname{Im} z<1$.

32. $\operatorname{Im}\frac{z-z_1}{z-z_2}=0$; $\operatorname{Re}\frac{z-z_1}{z-z_2}=0$. **33.** $|2z|>|1+z^2|$.

34. 1) $|z|<\arg z$, si $0\leqslant\arg z<2\pi$;
2) $|z<\arg z$, si $0<\arg z\leqslant 2\pi$.

En los problemas **35—38** se requiere determinar las familias de curvas en el z-plano definidas por las ecuaciones correspondientes.

35. 1) $\operatorname{Re}\frac{1}{z}=C$; 2) $\operatorname{Im}\frac{1}{z}=C$ $(-\infty<C<\infty)$.

36. 1) $\operatorname{Re} z^2=C$; 2) $\operatorname{Im} z^2=C\ (-\infty<C<\infty)$.

37. $\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right|=\lambda\ (\lambda>0)$. **38.** $\arg\frac{z-z_1}{z-z_2}=\alpha\ (-\pi<\alpha\leqslant\pi)$.

39. 1) Una familia de curvas en el z-plano viene dada por la ecuación

$$|z^2-1|=\lambda\quad(\lambda>0).$$

¿Para qué valores de λ las curvas de la familia constarán de una curva simple y para qué valores se descompondrán?

2) Responda a las mismas preguntas en el caso de la familia

$$|z^2+az+b|=\lambda\quad(\lambda>0).$$

40. Halle las distancias máxima y mínima entre el origen de coordenadas y los puntos de la curva dada ($a>0$):

1) $\left|z+\frac{1}{z}\right|=a$; 2) $\left|z+\frac{b}{z}\right|=a$.

41. La función $\arg z$ queda definida uniformemente en todo punto $z\neq 0$, si tomamos $|z|-2\pi<\arg z\leqslant|z|$. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos en los que se altera la continuidad de la función $\arg z$ definida de esta forma?

42. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos en los que se altera la continuidad de la función $\arg z$ definida uniformemente para todo $z\neq 0$ mediante las desigualdades $\ln|z|-2\pi<\arg z\leqslant\ln|z|$?

43. El valor inicial de $\operatorname{Arg} f(z)$ para $z=2$ se ha tomado igual a 0. El punto z realiza una vuelta completa en el sentido opuesto al del movimiento de las agujas del reloj, manteniéndose sobre la circunferencia de centro en el origen de coordenadas y volviendo al punto $z=2$. Aceptando que $\operatorname{Arg} f(z)$ varía continuamente durante el movimiento del punto z, señale el valor de $\operatorname{Arg} f(2)$ después de la vuelta indicada, si

1) $f(z)=\sqrt{z-1}$; 2) $f(z)\sqrt[3]{z-1}$; 3) $f(z)=\sqrt{z^2-1}$;

4) $f(z)=\sqrt{z^2+2z-3}$; 5) $f(z)=\sqrt{\frac{z-1}{z+1}}$.

PROYECCIÓN ESTEREOGRAFICA

44. Deduzca las fórmulas de la proyección estereográfica que expresan las coordenadas (ξ,η,ζ) de un punto P de la esfera de diámetro 1, tangente en el origen de coordenadas al z-plano, en términos de las coordenadas (x, y) del punto correspondiente z. Exprese también x e y mediante ξ, η y ζ (se supone que los ejes ξ y η coinciden con los ejes x e y respectivamente).

Observación. En el problema 44 la correspondencia se establece entre los puntos del plano complejo y los de una esfera de radio 1/2 tangente a este plano. También se emplea otra forma de correspondencia, cuando se toma una esfera de radio 1 y el z-plano se traza por su centro. Véase, por ejemplo, [1; cap. 1, § 5, nº 2].

45. ¿Cuáles son sobre la esfera las imágenes de los puntos $1, -1, i$ y $(1-i)/\sqrt{2}$?

46. ¿Cuál es en el plano la imagen del paralelo de latitud $\beta\left(-\frac{\pi}{2}<\beta<\frac{\pi}{2}\right)$? ¿A qué corresponden los polos "sur" y "norte"?

47. Halle en la esfera las imágenes:

1) de los rayos $\arg z=\alpha$;
2) de las circunferencias $|z|=r$.

48. ¿Qué posición recíproca tienen en la esfera las imágenes de un par de puntos simétricos

1) respecto al punto $z=0$;
2) respecto al eje real;
3) respecto a la circunferencia unidad?

49. ¿Qué condición deben verificar los puntos z_1 y z_2 para ser proyecciones estereográficas de dos puntos diametralmente opuestos de la esfera?

50. ¿Qué transformación de la esfera convierte la imagen del punto z en la imagen del punto $1/z$?

51. Halle en la esfera las imágenes de los recintos definidos por las desigualdades:

1) $\operatorname{Im} z>0$; 2) $\operatorname{Im} z<0$; 3) $\operatorname{Re} z>0$;
4) $\operatorname{Re} z<0$; 5) $|z|<1$; 6) $|z|>1$.

52. ¿Qué corresponde en la esfera a la familia de rectas paralelas del plano?

53. Demuestre que mediante la proyección estereográfica las circunferencias sobre la esfera se transforman en circunferencias o rectas del plano. ¿Cuáles son las circunferencias sobre la esfera que se transforman en rectas?

54. Sea K una circunferencia del plano correspondiente a la circunferencia K' sobre la esfera, sea N el polo norte de la esfera y sea S el vértice del cono tangente a la esfera a lo largo de K' (se supone que K' no es un círculo mayor). Demuestre que el centro de la circunferencia K se encuentra sobre el rayo NS. Considere el caso en que K' es un círculo mayor.

55. Demueste que en la proyección estereográfica los ángulos entre curvas sobre la esfera son iguales a los ángulos entre sus imágenes en el plano.

56. Halle la longitud $k(z, a)$ de la cuerda que une los puntos de la esfera correspondientes a los puntos z y a. Considere también el caso en que a es el punto infinito.

57. Dados dos puntos z_1 y z_2 (uno de los cuales puede ser el infinito), halle el lugar geométrico de los puntos del z-plano al que corresponde en la esfera una circunferencia equidistante de las imágenes de los puntos dados.

§ 2. FUNCIONES TRASCENDENTES ELEMENTALES

Por definición se toma

$$\exp z = e^z = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y);$$

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}; \quad \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}; \quad \operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}; \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z};$$

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z+e^{-z}}{2}; \quad \operatorname{sh} z = \frac{e^z-e^{-z}}{2}; \quad \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}; \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

58. Valiéndose de la definición de e^z, demuestre que
1) $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$; 2) $e^{z+2\pi i} = e^z$.
3) Si $e^{z+\omega} = e^z$ para todo z, entonces

$$\omega = 2\pi k i \quad (k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots).$$

La relación $\exp i\varphi = e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi$ (fórmula de Euler) permite emplear para la notación de un número complejo la forma exponencial $z = re^{i\varphi}$ en lugar de la forma trigonométrica $z = r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$. En lo sucesivo, por φ entenderemos generalmente el valor principal del argumento, es decir, $-\pi < \varphi \leqslant \pi$.

59. Represente en la forma exponencial los números 1, -1, i, $-i$, $1+i$, $1-i$, $-1+i$, $-1-i$.

60. Halle $e^{\pm \pi i/2}$; $e^{k\pi i}$ $(k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots)$.

61. Halle los módulos y los valores principales de los argumentos de los números complejos e^{2+i}; e^{2-3i}; e^{3+4i}; e^{-3-4i}; $-ae^{i\varphi}$ $(a > 0, |\varphi| \leqslant \pi)$; $e^{-i\varphi}$ $(|\varphi| \leqslant \pi)$; $e^{i\alpha} - e^{i\beta}$ $(0 \leqslant \beta < \alpha \leqslant 2\pi)$.

62. Halle las sumas:
1) $1 + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx$;
2) $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \ldots + \operatorname{sen} nx$;
3) $\cos x + \cos 3x + \ldots + \cos (2n-1)x$;
4) $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x + \ldots + \operatorname{sen} (2n-1)x$;
6) $\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x + \ldots + (-1)^{n-1} \operatorname{sen} nx$.

63. Halle las sumas:
1) $\cos\alpha + \cos(\alpha+\beta) + \ldots + \cos(\alpha+n\beta)$;
2) $\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}(\alpha+\beta) \ldots + \operatorname{sen}(\alpha+n\beta)$.

64. Partiendo de la definición de las funciones correspondientes, demuestre que:

1) $\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$; 2) $\operatorname{sen} z = \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right)$;

3) $\operatorname{sen}(z_1 + z_2) = \operatorname{sen} z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \operatorname{sen} z_2$;

4) $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z_2$;

5) $\operatorname{tg} 2z = \frac{2 \operatorname{tg} z}{1 - \operatorname{tg}^2 z}$; 6) $\operatorname{ch}(z_1 + z_2) = \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2$.

65. Demuestre que, si $\cos(z+\omega)=\cos z$ para todo z, entonces, $\omega=2\pi k$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

66. Demuestre que:

1) $\operatorname{sen} iz = i \operatorname{sh} z$; 2) $\cos iz = \operatorname{ch} z$; 3) $\operatorname{tg} iz = i \operatorname{th} z$;
4) $\operatorname{ctg} iz = -i \operatorname{cth} z$.

67. Exprese en términos de funciones trigonométricas e hiperbólicas de variable real las partes real e imaginaria, así como los módulos de las funciones siguientes:

1) $\operatorname{sen} z$; 2) $\cos z$; 3) $\operatorname{tg} z$; 4) $\operatorname{sh} z$; 5) $\operatorname{ch} z$; 6) $\operatorname{th} z$.

68. Halle las partes real e imaginaria de los siguientes valores de funciones:

1) $\cos(2+i)$; 2) $\operatorname{sen} 2i$; 3) $\operatorname{tg}(2-i)$;
4) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-i\ln 2\right)$; 5) $\operatorname{cth}(2+i)$; 6) $\operatorname{th}\left(\ln 3+\frac{\pi i}{4}\right)$.

69. Halle para cada una de las funciones e^z, $\cos z$, $\operatorname{sen} z$, $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{cth} z$ el conjunto de puntos z donde ellas toman:

1) valores reales;
2) valores imaginarios puros.

70. Halle todos los valores de z para los cuales

1) $|\operatorname{tg} z|=1$; 2) $|\operatorname{th} z|=1$.

Por definición se toma $\operatorname{Ln} z=\ln r+i\varphi+2\pi ik$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, $\ln z = \ln r+i\varphi$ $(-\pi<\varphi\leqslant\pi)$ ($\ln z$ se denomina *valor principal* de la magnitud $\operatorname{Ln} z$).

71. Calcule:

1) $\operatorname{Ln} 4$, $\operatorname{Ln}(-1)$, $\ln(-1)$; 2) $\operatorname{Ln} i$, $\ln i$;
3) $\operatorname{Ln}\frac{1\pm i}{\sqrt{2}}$; 4) $\operatorname{Ln}(2-3i)$, $\operatorname{Ln}(-2+3i)$.

72. Halle el error en los razonamientos que conducen a la paradoja de J. Bernoulli: $(-z)^2=z^2$; por esto, $2\operatorname{Ln}(-z)=2\operatorname{Ln} z$ y, por consiguiente, $\operatorname{Ln}(-z)=\operatorname{Ln} z$ (!).

73. El valor inicial de $\operatorname{Im} f(z)$ para $z=2$ se ha tomado igual a cero. El punto z realiza una vuelta completa en el sentido opuesto al del movimiento de las agujas del reloj, manteniéndose en la circunferencia de centro en el punto $z=0$ y volviendo al punto $z=2$. Aceptando que $f(z)$ varía continuamente durante el movimiento del punto z, señale el valor de $\operatorname{Im} f(z)$ después de dicha vuelta, si:

1) $f(z)=2\operatorname{Ln} z$; 2) $f(z)=\operatorname{Ln}\frac{1}{z}$;
3) $f(z)=\operatorname{Ln} z-\operatorname{Ln}(z+1)$; 4) $f(z)=\operatorname{Ln} z+\operatorname{Ln}(z+1)$.

Por definición, cualesquiera que sean los números complejos $a\neq 0$ y α, se toma

$$a^{\alpha}=\exp\{\alpha \operatorname{Ln} a\} \tag{1}$$

o bien $a^{\alpha}=e^{\alpha \operatorname{Ln} a}$ si continuamos comprendiendo $\exp z$ como e^z [1].

[1] De acuerdo con (1) $e^z=\exp\{z \operatorname{Ln} e\}=\exp\{z(1+2\pi ik\}$. Sin embargo, si es que no se dice lo contrario, tomaremos $k=0$, es decir, $e^z=\exp z$, al igual que antes.

74. Halle todos los valores de las potencias siguientes:

1) $1^{\sqrt{2}}$; 2) $(-2)^{\sqrt{2}}$; 3) 2^{i}; 4) 1^{-i}; 5) i^{i};

6) $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}$; 7) $(3-4i)^{1+i}$; 8) $(-3+4i)^{1+i}$.

75. Pruebe que en el caso de un exponente racional ($\alpha=m/n$) la definición general de potencia z^{α} coincide con la definición corriente:

$$z^{\frac{m}{n}}=(\sqrt[n]{z})^{m}$$

(véase asimismo el problema 6).

76. ¿Coinciden los conjuntos de valores de $a^{2\alpha}$, $(a^{\alpha})^{2}$ y $(a^{2})^{\alpha}$?

Por definición, la igualdad $w=\operatorname{Arccos} z$ es equivalente a la igualdad $z=\cos w$. Análogamente se definen las funciones $\operatorname{Arcsen} z$, $\operatorname{Arctg} z$, $\operatorname{Arcctg} z$ y las funciones hiperbólicas inversas $\operatorname{Arch} z$, $\operatorname{Arsh} z$, $\operatorname{Arth} z$, $\operatorname{Arcth} z$.

77. Demuestre las siguientes igualdades (se toman en consideración todos los valores de las raíces):

1) $\operatorname{Arccos} z=-i\operatorname{Ln}(z+\sqrt{z^{2}-1})$;

2) $\operatorname{Arcsen} z=-i\operatorname{Ln} i(z+\sqrt{z^{2}-1})$;

3) $\operatorname{Arctg} z=\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{i+z}{i-z}=\frac{1}{2i}\operatorname{Ln}\frac{1+iz}{1-iz}$;

4) $\operatorname{Arcctg} z=\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{z-i}{z+i}$; 5) $\operatorname{Arch} z=\operatorname{Ln}(z+\sqrt{z^{2}-1})$;

6) $\operatorname{Arsh} z=\operatorname{Ln}(z+\sqrt{z^{2}+1})$; 7) $\operatorname{Arth} z=\frac{1}{2}\operatorname{Ln}\frac{1+z}{1-z}$;

8) $\operatorname{Arcth} z=\frac{1}{2}\operatorname{Ln}\frac{z+1}{z-1}$.

78. Demuestre que cualquiera que sea el valor de $\operatorname{Arccos} z$ se puede escoger el valor de $\operatorname{Arcsen} z$ de manera que la suma de estos valores sea igual a $\pi/2$. Demuestre una proposición análoga para $\operatorname{Arctg} z$ y $\operatorname{Arcctg} z$.

Observación. Las igualdades $\operatorname{Arcsen} z+\operatorname{Arccos} z=\pi/2$ y $\operatorname{Arctg} z+\operatorname{Arcctg} z=\pi/2$ siempre se entienden en el sentido indicado en el problema anterior.

79. Compruebe que todos los valores de $\operatorname{Arccos} z$ están contenidos en la fórmula

$$\operatorname{Arccos} z=\pm i\operatorname{Ln}(z+\sqrt{z^{2}-1}),$$

donde por $\sqrt{z^{2}-1}$ *se entiende* uno de sus valores.

80. 1) ¿Para qué valores de z todos los valores de las funciones $\operatorname{Arccos} z$, $\operatorname{Arcsen} z$ y $\operatorname{Arctg} z$ son reales?

2) ¿Para qué valores de z la función $\operatorname{Arsh} z$ toma valores imaginarios puros?

81. Halle todos los valores de las siguientes funciones:

1) Arcsen 1/2; 2) Arccos 1/2; 3) Arccos 2; 4) Arcsen i;
5) $\operatorname{Arctg}(1+2i)$; 6) Arch $2i$; 7) $\operatorname{Arth}(1-i)$.

82. Halle todas las raíces de las siguientes ecuaciones:
1) $\operatorname{sen} z + \cos z = 2$; 2) $\operatorname{sen} z - \cos z = 3$;
3) $\operatorname{sen} z - \cos z = i$; 4) $\operatorname{ch} z - \operatorname{sh} z = 1$;
5) $\operatorname{sh} z - \operatorname{ch} z = 2i$; 6) $2 \operatorname{ch} z + \operatorname{sh} z = i$.

83. Halle todas las raíces de las siguientes ecuaciones:
1) $\cos z = \operatorname{ch} z$; 2) $\operatorname{sen} z = i \operatorname{sh} z$; 3) $\cos z = i \operatorname{sh} 2z$.

§ 3. SUCESIONES Y SERIES NUMERICAS

84. Demuestre que, si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ converge y $|\arg c_n| \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}$, la serie converge absolutamente.

85. Sean convergentes las series $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$. Demuestre que siendo $\operatorname{Re} c_n \geqslant 0$, también converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$.

86. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ posee la propiedad de que las cuatro partes suyas, compuestas por los términos pertenecientes a un mismo cuadrante cerrado del plano, convergen. Demuestre que la serie dada converge absolutamente.

87. Demuestre la fórmula (transformación de Abel)

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = \sum_{k=m}^{n-1} S_k (b_k - b_{k+1}) - S_{m-1} b_m + S_n b_n,$$

donde $1 \leqslant m \leqslant n$, $S_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ $(k \geqslant 1)$, $S_0 = 0$.

88. Demuestre que para la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, donde $b_n > 0$, es suficiente que sean acotadas las sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y que la sucesión de números $\{b_n\}$ tienda monótonamente hacia el cero (criterio de Dirichlet).

Sugerencia. Recurra a la transformación de Abel.

89. Demuestre que para la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, donde b_n son números reales, es suficiente que converja la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y que la sucesión $\{b_n\}$ sea monótona y acotada (criterio de Abel).

90. Demuestre que para la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ es suficiente que se verifiquen las siguientes condiciones:

1) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\, b_n = 0$; 2) la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\, |b_n - b_{n+1}|$ converja:

3) la sucesión $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$, donde $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, sea acotada.

91. Sea $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = q$. Demuestre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ converge (absolutamente), si $q < 1$, y diverge, si $q > 1$.

92. *Tomando como ejemplo las series*

$$1 + \frac{1}{2^\beta} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\beta} + \ldots \quad (1 < \alpha < \beta)$$

y

$$\alpha + \beta^2 + \alpha^3 + \beta^4 + \ldots \quad (0 < \alpha < \beta < 1),$$

compruebe que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ puede ser convergente aun cuando $\overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| > 1$.

93. Demuestre que, si $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = 1$, para la convergencia absoluta de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ es suficiente que sea

$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n \left(\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| - 1\right) < -1$ (criterio de Raabe).

94. Demuestre el criterio de Gauss: si $\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = 1 + \frac{a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, donde a no depende de n y $a < -1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ converge absolutamente.

Analice la convergencia de las series $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ en los problemas **95—104**.

95. $c_n = \frac{n}{(2i)^n}$. **96.** $c_n = \frac{n!}{(in)^n}$. **97.** $c_n = e^{in}$. **98.** $c_n = \frac{e^{in}}{n}$.

99. $c_n = \frac{e^{in\varphi}}{n}$. **100.** $c_n = \frac{e^{in}}{n^2}$. **101.** $c_n = \frac{1}{n} e^{\pi i/n}$.

102. $c_n = \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{n!\,\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}$ (serie hipergeométrica), $\mathrm{Re}(\alpha+\beta-\gamma) < 0$.

103. $c_n = \frac{\cos in}{2^n}$. **104.** $c_n = \frac{n \operatorname{sen} in}{3^n}$.

105. Halle los puntos de acumulación de los conjuntos:

1) $z = 1 + (-1)^n \frac{n}{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$;

2) $z = \frac{1}{m} + \frac{i}{n}$ (m, n son números enteros arbitrarios);

3) $z = \frac{p}{m} + i\frac{q}{n}$ (m, n, p y q son números enteros arbitrarios):

4) $|z| < 1$.

106. Demuestre que de una sucesión $\{z_n\}$ acotada de puntos se puede extraer una subsucesión convergente.

107. Demuestre las siguientes proposiciones:

1) La convergencia de la sucesión $\{z_n = x_n + iy_n\}$ equivale a la convergencia sumultánea de las sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$.

2) Para que exista el límite $\lim\limits_{n\to\infty} z_n \neq 0$ es necesario y suficiente que existan los límites $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| \neq 0$ y (definiendo convenientemente $\arg z_n$) $\lim\limits_{n\to\infty} \arg z_n$. Si el $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$ no es un número negativo, se puede aceptar, por ejemplo, que $-\pi < \arg z_n \leqslant \pi$.

¿En qué casos la convergencia de la sucesión $\{z_n\}$ equivale a la convergencia de la sucesión $\{|z_n|\}$ solamente?

108. Basándose en los resultados del problema **107** demuestre que:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n\left(\sqrt[n]{z} - 1\right)\right] = \ln r + i\varphi + 2\pi ik$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

§ 4. FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA

FUNCIONES COMPLEJAS DE VARIABLE REAL

En los problemas 95—115 se requiere determinar las curvas definidas por las ecuaciones dadas.

109. $z = 1 - it$; $0 \leqslant t \leqslant 2$. **110.** $z = t + it^2$; $-\infty < t < \infty$.

111. $z = t^2 + it^4$; $-\infty < t < \infty$.

112. $z = a(\cos t + i \operatorname{sen} t)$; $\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{3\pi}{2}$; $a > 0$.

113. $z = t + \frac{i}{t}$; $-\infty < t < 0$.

114. 1) $z = t + i\sqrt{1 - t^2}$; $-1 \leqslant t \leqslant 1$; 2) $z = -t + i\sqrt{1 - t^2}$; (se toma el valor aritmético de la raíz).

115. 1) $z = a(t + i - ie^{-it})$; $-\infty < t < \infty$, $a > 0$;

2) $z = ia + at - ibe^{-it}$; $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, $a > 0$, $b > 0$.

116. Dada la transformación $w=z^2$ se requiere:

1) hallar las imágenes de las curvas $x=C$, $y=C$, $x=y$, $|z|=R$ y $\arg z=\alpha$ y explicar cuáles de estas curvas se transforman *biunívocamente*;

2) hallar las preimágenes (en el z-plano) de las curvas $u=C$ y $v=C$ $(w=u+iv)$.

117. Dada la transformación $w=1/z$, halle:

1) las imágenes de las curvas $x=C$, $y=C$, $|z|=R$, $\arg z=\alpha$ y $|z-1|=1$;

2) las preimágenes de las curvas $u=C$ y $v=C$.

118. Para las transformaciones $w=z+\frac{1}{z}$ y $w=z-\frac{1}{z}$ halle las imágenes de las circunferencias $|z|=R$.

119. Para la transformación $w=z+\frac{1}{z}$ halle en el z-plano la preimagen de la red rectangular ($u=C$, $v=C$) del plano w.

120. ¿En qué se transforma la circunferencia $|z|=1$ mediante la transformación $w=z/(1-z)^2$?

121. Para la transformación $w=e^z$ halle:

1) las imágenes de las curvas $x=C$, $y=C$ y $x=y$;

2) las preimágenes de la curva $\rho=\theta$ $(0\leqslant\theta<\infty)$.

122. Halle en qué transforman la red rectangular ($x=C$, $y=C$) del plano z las funciones:

1) $w=z^2+z$; 2) $w=\operatorname{cth} z$; 3) $w=e^{z^2}$.

123. ¿En qué transforma la función $w=e^z+z$ los segmentos de las rectas $x=C$ y las rectas $y=C$ pertenecientes a la franja $0\leqslant y\leqslant\pi$?

124. ¿Qué corresponde en el z-plano a la red polar $|w|=R$, $\arg w=\alpha$ en las transformaciones: 1) $w=e^{1/z}$; 2) $w=e^{z^2}$?

CONTINUIDAD

125. Una función $f(z)$, definida en una vecindad de un punto z_0, se llama *continua según Heine* en el punto z_0, si para cualquier sucesión $\{z_n\}$, convergente hacia z_0, se verifica la condición $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)=f(z_0)$; esta misma función se llama continua según Cauchy, si para cualquier $\varepsilon>0$ existe un $\delta(\varepsilon)>0$, tal que de la desigualdad $|z-z_0|<\delta$ se desprende que $|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$. Demuestre la equivalencia de ambas definiciones (véase, por ejemplo, [1, capítulo I, § 3, n° 6]).

126. Las funciones $\frac{\operatorname{Re} z}{z}$, $\frac{z}{|z|}$, $\frac{\operatorname{Re}(z^2)}{|z|^2}$ y $\frac{z\operatorname{Re} z}{|z|}$ están definidas para $z\neq 0$. ¿Cuáles pueden ser definidas en el punto $z=0$ de manera que sean continuas en este punto?

127. ¿Serán continuas las funciones 1) $1/(1-z)$, 2) $1/(1+z^2)$ en el interior del círculo unidad ($|z|<1$)? ¿Serán uniformemente continuas?

128. 1) Demuestre que la función $e^{-1/|z|}$ es uniformemente continua en el círculo $|z| \leqslant R$ excluido el punto $z=0$.

2) ¿Será uniformemente continua en este mismo recinto la función e^{-1/z^2}?

3) ¿Será uniformemente continua la función e^{-1/z^2} en el sector $0<|z| \leqslant R$, $|\arg z| \leqslant \pi/6$?

129. La función $w=e^{-1/z}$ está definida en todo punto excepto el punto $z=0$. Demuestre que:

1) esta función es acotada pero no continua en el semicírculo $0<|z| \leqslant 1$, $|\arg z| \leqslant \pi/2$;

2) en el interior de este semicírculo la función es continua pero no uniformemente;

3) la función es uniformemente continua en el sector $0<|z| \leqslant 1$, $|\arg z| \leqslant \alpha < \pi/2$.

130. La función $f(z)$ es uniformemente continua en el circulo $|z|<1$. Demuestre que existe el límite $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)$ para todo punto ζ de la circunferencia $|z|=1$ y cualquier sucesión $z_n \to \zeta$, $|z_n|<1$. Demuestre también que este límite no depende de la selección de la sucesión $\{z_n\}$ y que, si la función se define en la fronteıa del circulo por medio del paso al límite, resultará continua en todo el círculo cerrado $|z| \leqslant 1$.

§ 5. FUNCIONES ANALITICAS Y ARMONICAS

CONDICIONES DE CAUCHY-RIEMANN

131. Compruebe que las condiciones de Cauchy-Riemann se verifican para las funciones z^n, e^z, $\cos z$ y $\operatorname{Ln} z$ y demuestre que

$$(z^n)'=nz^{n-1},\quad (e^z)'=e^z,\quad (\cos z)'=-\operatorname{sen} z,\quad (\operatorname{Ln} z)'=\frac{1}{z}.$$

132. Halle los valores que deben tomar las constantes a, b y c para que la función $f(z)$ sea analítica:

1) $f(z)=x+ay+i(bx+cy)$;

2) $f(z)=\cos x(\operatorname{ch} y+a \operatorname{sh} y)+i \operatorname{sen} x(\operatorname{ch} y+b \operatorname{sh} y)$.

133. Halle los recintos donde la función

$$f(z)=|x^2-y^2|+2i|xy|$$

es analítica.

134. $f(z)=u+iv=\rho e^{i\varphi}$ es una función analitica. Demuestre que, si una de las funciones u, v, ρ o θ es igual idénticamente a una constante, la función $f(z)$ es constante.

135. Sea $z=re^{i\varphi}$ y sea $f(z)=u(r, \varphi)+iv(r, \varphi)$. Escriba las ecuaciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares.

136. Demuestre que, si $f(z)=u+iv$ es una función analítica y $\boldsymbol{s}$ y $\boldsymbol{n}$ son vectores ortogonales, tales, que la rotación del vector $\boldsymbol{s}$ hacia el vector $\boldsymbol{n}$ en ángulo recto se realiza en el sentido opuesto al del movimiento de las agujas del reloj, resulta,

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial v}{\partial n} \text{ y } \frac{\partial u}{\partial n}=-\frac{\partial v}{\partial s}$$

$\left(\frac{\partial}{\partial s}\right.$ y $\frac{\partial}{\partial n}$ son derivadas de funciones de dos variables reales respecto a la dirección correspondiente).

137. Demuestre que la función $f(z)=\bar{z}$ no es diferenciable en ningún punto.

138. Demuestre que la función $w=z\,\mathrm{Re}\,z$ es diferenciable sólo en el punto $z=0$; halle $w'(0)$.

139. Demuestre que en el punto $z=0$ la función $f(z)=\sqrt{|xy|}$ verifica las condiciones de Cauchy-Riemann pero no tiene derivada.

140. Demuestre las siguientes proposiciones:

1) Si para la función $w=f(z)$ existe en el punto z el límite

$$\lim_{\Delta z \to 0}\left[\mathrm{Re}\,\frac{\Delta w}{\Delta z}\right],$$

las derivadas parciales u_x y v_y existen y coinciden.

2) Si existe el límite $\lim\limits_{\Delta z \to 0}\left[\mathrm{Im}\,\frac{\Delta w}{\Delta z}\right]$, las derivadas parciales u_y y v_x existen y $u_y=-v_x$.

3) Si se supone de antemano que las funciones u y v son diferenciables, la existencia de cualquiera de los límites de los puntos 1) ó 2) implica la existencia del otro y, por consiguiente, la diferenciabilidad de la función $f(z)$.

141. La función $w=f(z)$ verifica en el punto z las siguientes condiciones: 1) las funciones u y v son diferenciables; 2) el límite $\lim\limits_{\Delta z \to \infty}\left|\frac{\Delta w}{\Delta z}\right|$ existe. Demuestre que o bien $f(z)$ o bien $\overline{f(z)}$ es diferenciable en el punto z.

142. La función $w=f(z)$ verifica en el punto z las siguientes condiciones: 1) las funciones u y v son diferenciables; 2) existe el límite $\lim\limits_{\Delta z \to 0}\arg\frac{\Delta w}{\Delta z}$. Demuestre que $f(z)$ es diferenciable en el punto z.

143. Sea $w=f(z)=u+iv$ y sean $u(x, y)$ y $v(x, y)$ diferenciables en el punto z. Demuestre que para $\Delta z \to 0$ el conjunto de todos los posibles valores límites de la razón $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ es o bien un punto o bien una circunferencia.

Si en la relación

$$w=w(z)=f(x,\ y)=f\left(\frac{z+\bar{z}}{2},\ \frac{z-\bar{z}}{2i}\right)=\varphi(z,\ \bar{z})$$

z y $\bar{z}$ se consideran como verlables independientes, las derivadas respecto a estas variables serán iguales a

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

En lo sucesivo aceptamos la siguiente denotación:

$$\frac{\partial w}{\partial z}=w_z,\quad \frac{\partial w}{\partial \bar{z}}=w_{\bar{z}},$$

etc.

144. Demuestre las siguientes relaciones:

2) $dw=w_z dz+w_{\bar{z}}d\bar{z}$; 2) $w_z=\frac{1}{2}\left[(u_x+v_y)+i(-u_y+v_x)\right]$;

3) $w_{\bar{z}}=\frac{1}{2}\left[(u_x-v_y)+i(u_y+v_x)\right]$.

145. Demuestre que las ecuaciones de Cauchy — Riemann son equivalentes a la ecuación $w_{\bar{z}}=0$.

146. Demuestre que la ecuación de Laplace $\Delta u=0$ puede ser escrita en la forma $\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial \bar{z}}=0$.

147. Demuestre que $\overline{dw}=d\bar{w}$, $\overline{w_z}=\bar{w}_{\bar{z}}$ y $\overline{w_{\bar{z}}}=\bar{w}_z$ (la raya grande significa que al valor conjugado se pasa después de la diferenciación).

148. Demuestre que para la función $z(w)$, inversa respecto a $w(z)$, se tiene

$$dz=\frac{\bar{w}_{\bar{z}}}{|w_z|^2-|w_{\bar{z}}|^2}\,dw+\frac{-w_{\bar{z}}}{|w_z|^2-|w_{\bar{z}}|^2}\,d\bar{w}.$$

149. Demuestre que el jacobiano de la transformación $w(z)$ es igual a

$$J_{w/z}=\frac{\partial(u,\ v)}{\partial(x,\ y)}=|w_z|^2-|w_{\bar{z}}|^2.$$

150. Demuestre las siguientes igualdades:

1) $\frac{dw}{dz}=w_z+w_{\bar{z}}e^{-2i\alpha}$, donde $\alpha=\arg dz$;

2) $\max\limits_{\alpha}\left|\frac{dw}{dz}\right|=|w_z|+|w_{\bar{z}}|$;

3) $\min\limits_{\alpha}\left|\frac{dw}{dz}\right|=\big||w_z|-|w_{\bar{z}}|\big|$.

151. Demuestre que, siendo $\alpha = \arg dz$ y $\alpha' = \arg dw$, se tiene:

1) $\frac{d\alpha'}{d\alpha} = \frac{J_{w/z}}{(u_x \cos\alpha + u_y \operatorname{sen}\alpha)^2 + (v_x \cos\alpha + v_y \operatorname{sen}\alpha)^2} = \left|\frac{dz}{dw}\right|^2 \frac{1}{J_{z/w}}$;

2) $\text{máx}\, \frac{d\alpha'}{d\alpha} = p$, $\text{mín}\, \frac{d\alpha'}{d\alpha} = \frac{1}{p}$, donde $p = \frac{\text{máx}\left|\frac{dw}{dz}\right|}{\text{mín}\left|\frac{dw}{dz}\right|} =$

$$= \frac{|w_z| + |w_{\bar z}|}{\|w_z| - |w_{\bar z}\|}.$$

FUNCIONES ARMÓNICAS

Una función $u(x, y)$ que posee en un recinto derivadas parciales continuas hasta el segundo orden inclusive y que verifica la ecuación de Laplace

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

se llama *función armónica*. Dos funciones armónicas $u(x, y)$ y $v(x, y)$, ligadas por las ecuaciones de Cauchy — Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

se llaman *conjugadas*.

152. Demuestre las siguientes proposiciones:

1) Una combinación lineal de funciones armónicas $\sum_{i=1}^{n} c_i u_i(x, y)$ es una función armónica.

2) Si los argumentos de una función armónica $u(x, y)$ se someten a la transformación de inversión $x = \xi/(\xi^2 + \eta)$ e $y = \eta/(\xi^2 + \eta^2)$, la *función transformada será armónica*.

3) Si los argumentos de una función armónica $u(x, y)$ se someten a la transformación $x = \varphi(\xi, \eta)$ e $y = \psi(\xi, \eta)$, donde φ y ψ son funciones armónicas conjugadas, la función transformada será armónica. (De aquí se desprende, en particular, la proposición anterior).

4) Sean $u(x, y)$ y $v(x, y)$ dos funciones armónicas conjugadas y sea el jacobiano $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$ diferente de cero en un recinto. Entonces las funciones inversas $x(u, v)$ e $y(u, v)$ también serán armónicas y conjugadas.

153. Demuestre que para toda función $u(x, y)$, armónica en un recinto simplemente conexo G, existe una familia de funciones armónicas conjugadas que se diferencian una de otra en una constante aditiva

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy + C.$$

2) Demuestre que, si el recinto G es múltiplemente conexo y está limitado por el contorno exterior Γ_0 y por los contornons interio-

res $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ (fig. 1) (cada uno de los cuales puede degenerar en un punto), la función $v(x, y)$ puede resultar multiforme y la fórmula general para sus valores será

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy + \sum_{k=1}^{n} m_k \pi_k + C.$$

La integral se toma a lo largo de un camino perteneciente a G, m_k son números enteros y

$$\pi_k = \int_{\gamma_k} -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy,$$

donde γ_k son contornos cerrados simples, cada uno de los cuales contiene en su interior una parte conexa de la frontera (Γ_k) (los números π_k se llaman *periodos de la integral* o *constantes cíclicas*).

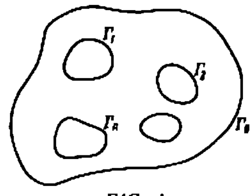


FIG. 1

Para que la función $v(x, y)$ sea uniforme es necesario y suficiente que todos los números π_k sean iguales a cero.

Observación. El contorno Γ_0 puede no existir siempre que la función $u(x, y)$ sea armónica en el punto infinito. Esto significa, por definición, que la función $U(\xi, \eta)$, obtenida de la función $u(x, y)$ mediante la transformación de inversión (véase el problema 152, 2), es armónica en el origen de coordenadas. Se puede demostrar que en este caso $\sum_{k=1}^{n} \pi_k = 0$.

154. Suponiendo conocido el hecho de que toda la función analítica es infinitamenle diferenciable, demuestre los siguientes teoremas:

1) Las partes real e imaginaria de una función analítica $f(z) = u + iv$ son funciones armónicas conjugadas.

2) Las derivadas (de cualquier orden) de una función armónica son también funciones armónicas.

155. 1) ¿Será armónica la función u^2, siendo armónica la función u?

2) Sea u una función armónica. ¿Para qué funciones f la función $f(u)$ también será armónica?

156. ¿Serán armónicas las funciones $|f(z)|$, $\arg f(z)$, y $\ln |f(z)|$, siendo $f(z)$ una función analítica?

157. Transforme el operador de Laplace $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ a las coordenadas polares (r, φ) y halle la solución de la ecuación de Laplace $\Delta u = 0$ dependiente sólo de r.

158. Calcule para $n = 1, 2, 3, 4$ los polincmios armónicos $p_n(x, y)$ y $q_n(x, y)$ definidos por la igualdad $z^n = p_n + iq_n$. Encuentre la forma general de p_n y q_n en el sistema polar de coordenadas.

Valiéndose de las fórmulas del problema **153**, halle en los problemas **159—163** las funciones conjugadas a las funciones armónicas dadas en los recintos señalados.

159. $u(x, y) = x^2 - y^2 + x$, $0 \leqslant |z| < \infty$.

160. $u(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$, $0 < |z| \leqslant \infty$.

161. $u(x, y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$ a) en el recinto que se obtiene excluyendo del plano el semieje $y=0$, $-\infty < x \leqslant 0$; b) en el plano con el origen de coordenadas excluido $(0<|z|<\infty)$.

162. $u(x, y) = \frac{1}{2}\{\ln(x^2+y^2) - \ln[(x-1)^2+y^2]\}$ a) en el plano con los puntos $z=0$ y $z=1$ excluidos; b) en el plano con el segmento del eje real $y=0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ excluido; c) en el plano con el rayo $y=0$, $1 \leqslant x < \infty$ excluido.

163. $u(x, y) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \ln[(x-x_k)^2+(y-y_k)^2]$ a) en el plano con los puntos $z_1, z_2, \ldots, z_n$ $(z_k = x_k + iy_k;\ z_1 \neq z_j)$ excluidos; b) en el plano del cual se ha excluido la quebrada simple (es decir, que no se interseca consigo misma) que une dos puntos dados.

164. ¿Existe una función analítica $f(z) = u + iv$, tal, que

1) $u = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$; 2) $v = \ln(x^2+y^2) - x^2 + y^2$; 3) $u = e^{y/x}$?

Halle en los problemas **165—168** la función analítica $f(z) = u + iv$ a partir de su parte real o *imaginaria dada.*

165. $u = x^2 - y^2 + 5x + y - \frac{y}{x^2+y^2}$.

166. $u = e^x(x\cos y - y \operatorname{sen} y) + 2\operatorname{sen} x \operatorname{sh} y + x^3 - 3xy^2 + y$.

167. $v = 3 + x^2 - y^2 - \frac{y}{2(x^2+y^2)}$.

168. $v = \ln(x^2+y^2) + x - 2y$.

Analice en los problemas **169—176** la existencia de funciones armónicas (diferentes de una constante) del tipo indicado y, si existen, calcúlelas.

169. $u = \varphi(x)$. **170.** $u = \varphi(ax+by)$ (a y b son números reales).

171. $u = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$. **172.** $u = \varphi(xy)$. **173.** $u = \varphi(x^2+y^2)$.

174. $u = \varphi\left(\frac{x^2+y^2}{x}\right)$. **175.** $u = \varphi(x + \sqrt{x^2+y^2})$.

176. $u = \varphi(x^2+y)$.

En los problemas **177—180** demuestre la existencia y encuentre la función analítica $f(z)$ a partir de su módulo o su argumento dado.

177. $\rho = (x^2+y^2)e^x$. **178.** $\rho = e^{r^2\cos 2\varphi}$.

179. $\vartheta = xy$. **180.** $\vartheta = \varphi + r \operatorname{sen} \varphi$

181. Demuestre la siguiente proposición: para que una familia de curvas $\varphi(x, y) = C$, donde φ es una función dos veces continuamente diferenciable, sea una familia de líneas equipotenciales de una función armónica es necesario y suficiente que la razón $\Delta\varphi/(\operatorname{grad} \varphi)^2$ dependa sólo de φ.

Sugerencia. Demuestre previamente que la función armónica requerida es de la forma $u = f[\varphi(x, y)]$.

En los problemas **182—186** halle las funciones analíticas, tales, que o bien sus partes reales, o bien sus partes imaginarias, o bien sus módulos, o bien sus argumentos se mantienen constantes a lo largo de cualquier curva de la familia correspondiente.

182. $x = C$. **183.** $y = C$. **184.** $y = Cx$.

185. $x^3 + y^3 = C$. **186.** $x^2 + y^2 = Cx$.

SIGNIFICADO GEOMÉTRICO DEL MÓDULO Y DEL ARGUMENTO DE LA DERIVADA

187. La transformación se realiza mediante las funciones $w = z^2$ y $w = z^3$. Halle el ángulo de rotación (ϑ) de una dirección con origen en el punto z_0 y el coeficiente de dilatación (k) en los siguientes puntos:

1) $z_0 = 1$; 2) $z_0 = -\frac{1}{4}$; 3) $z_0 = 1 + i$; 4) $z_0 = -3 + 4i$.

188. ¿Qué parte del plano se contrae y qué parte se dilata, si la transformación se realiza mediante la función:

1) $w = z^2$? 2) $w = z^2 + 2z$? 3) $w = \frac{1}{z}$? 4) $w = e^z$? 5) $w = \ln(z - 1)$?

189. El recinto G se transforma conforme y biunívocamente mediante la función $f(z)$ en el recinto G'. Halle las fórmulas que permiten calcular el área S del recinto G' y la longitud L del arco en el que se transforma un arco l perteneciente al recinto G.

190. Halle la longitud L de la espiral en la que transforma el segmento $y = x$, $0 \leqslant x \leqslant 2$ la función e^z.

191. Halle el área del recinto en el que transforma el rectángulo $1 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant y \leqslant 4$ la función e^z.

192. Halle el recinto D en el que transforma el rectángulo $1 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant y \leqslant 8$ la función e^z. Calcule el área del recinto D utilizando la formula obtenida en el problema **189** y explique por qué esta fórmula no ofrece el resultado correcto.

CAPITULO II

TRANSFORMACIONES CONFORMES RELACIONADAS CON FUNCIONES ELEMENTALES

§ 1. FUNCIONES LINEALES

FUNCIONES LINEALES ENTERAS

193. Halle la función lineal entera que transforma el triángulo, cuyos vértices se encuentran en los puntos 0, 1 e i, en un triángulo semejante con vértices en 0, 2 y $1+i$.

194. Halle la transformación lineal entera con el punto inmóvil $1+2i$ que transforma el punto i en el punto $-i$.

195. Halle para las transformaciones dadas el punto inmóvil finito z_0 (si es que existe), el ángulo de rotación ϑ alrededor del mismo y el coeficiente de dilatación k. Reduzca estas transformaciones a la forma canónica $w-z_0=\lambda(z-z_0)$.

1) $w=2z+1-3i$; 2) $w=iz+4$; 3) $w=z+1-2i$;
4) $w-w_1=a(z-z_1)\,(a\neq 0)$; 5) $w=az+b\,(a\neq 0)$.

196. Halle la forma general de la transformación lineal entera que transforma:

1) el semiplano superior en sí mismo;
2) el semiplano superior en el semiplano inferior;
3) el semiplano superior en el semiplano de la derecha;
4) el semiplano de la derecha en sí mismo.

Compruebe que en todos los casos la transformación queda definida unívocamente al indicarse un par de puntos interiores o dos pares de puntos frontera correspondientes.

197. Halle la forma general de la transformación lineal entera que transforma:

1) la franja $0<x<1$ en sí misma;
2) la franja $-2<y<1$ en sí misma;
3) la franja limitada por las rectas $y=x$ e $y=x-1$ en sí misma.

Estudie qué pares de puntos corresponderán uno a otro en estas transformaciones y en qué caso esta correspondencia determinará unívocamente la transformación.

198. Halle la función lineal entera $w(z)$ que transforma la franja comprendida entre las rectas dadas en la franja $0 < u < 1$ y que verifica la condición de normalización dada:

1) $x = a$, $x = a + h$; $w(a) = 0$;

2) $x = a$, $x = a + h$; $w\left(a + \frac{h}{2}\right) = \frac{1}{2} + i$, $\operatorname{Im} w\left(a + \frac{h}{2} + i\right) < 1$;

3) $y = kx$, $y = kx + b$; $w(0) = 0$;

4) $y = kx + b_1$, $y = kx + b_2$; $w(b_1) = 0$.

199. Halle la función lineal entera que transforma el círculo $|z| < 1$ en el círculo $|w - w_0| < R$ de manera que los centros de los círculos correspondan uno al otro y el diámetro horizontal se transforme en el diámetro que forma con la dirección del eje real el ángulo α.

FUNCIONES HOMOORÁFICAS

200. Dada la función $w = \frac{1}{z}$ halle las imágenes de las siguientes curvas:

1) la familia de circunferencias $x^2 + y^2 = ax$;

2) la familia de circunferencias $x^2 + y^2 = by$;

3) el haz de rectas paralelas $y = x + b$;

4) el haz de rectas $y = kx$;

5) el haz de rectas que pasan por un punto dado $z_0 \neq 0$;

6) la parábola $y = x^2$.

201. Halle en qué transforma la función $w = \frac{1}{z - z_0} + h$:

1) la red rectangular $x = C$ e $y = C$;

2) la red polar $|z - z_0| = R$ y $\arg(z - z_0) = \alpha$.

202. Dada la función $w = \frac{z - z_1}{z - z_2}$:

1) Demuestre que la preimagen de la familia $|w| = \lambda\ (0 < \lambda < \infty)$ es una familia de circunferencias (las circunferencias de Apolonio). Para un valor de λ dado halle el radio y la posición en el z-plano del centro de la circunferencia correspondiente.

2) Halle las preimágenes de los rayos $\arg w = \theta$.

3) Construya la red del z-plano que corresponde a la red polar del w-plano.

4) Halle el recinto del z-plano que corresponde al semicírculo $|w| < 1$, $\operatorname{Im} w > 0$.

En los problemas **203—207** explique en qué se transforman los recintos indicados mediante las funciones dadas.

203. El cuadrante $x > 0$, $y > 0$; $w = \frac{z - i}{z + i}$.

204. El semicírculo $|z| < 1$, $\operatorname{Im} z > 0$; $w = \frac{2z - i}{2 + iz}$.

205. El ángulo $0 < \varphi < \frac{\pi}{4}$; $w = \frac{z}{z - 1}$.

206. La franja $0 < x < 1$; 1) $w = \frac{z-1}{z}$; 2) $w = \frac{z-1}{z-2}$.

207. El anillo $1 < |z| < 2$; $w = \frac{z}{z-1}$.

208. Transforme en la franja vertical $0 < \operatorname{Re} w < 1$

1) el semiplano $\operatorname{Re} z > 0$ con el círculo $\left|z - \frac{d}{2}\right| \leqslant \frac{d}{2}$ excluido;

2) la lúnula comprendida entre las circunferencias

$$\left|z - \frac{d_1}{2}\right| = \frac{d_1}{2} \text{ y } \left|z - \frac{d_2}{2}\right| = \frac{d_2}{2} \quad (d_1 < d_2);$$

3) el exterior de los círculos $\left|z + \frac{d_1}{2}\right| = \frac{d_1}{2}$ y $\left|z - \frac{d_2}{2}\right| = \frac{d_2}{2}$ de manera que $w(d_2) = 0$.

209. Halle las funciones homográficas que transforman los puntos -1, i y $1+i$ en los puntos:

1) 0, $2i$ y $1-i$; 2) i, ∞, y 1 respectivamente.

210. Halle las funciones homográficas que transforman los puntos -1, ∞ e i en los puntos

1) i, 1 y $1+i$; 2) ∞, i y 1; 3) 0, ∞ y 1 respectivamente.

211. Halle las funciones homográficas a partir de las siguientes *condiciones:*

1) los puntos 1 e i son inmóviles y el punto 0 se transforma en el punto -1;

2) los puntos $\frac{1}{2}$ y 2 son inmóviles y el punto $\frac{5}{4} + \frac{3}{4} i$ se transforma en el ∞;

3) el punto i es un punto inmóvil doble y el punto 1 se transforma en el ∞.

212. Halle la función homográfica que transforma los puntos -1, 0 y 1 en los puntos 1, i y -1 respectivamente y explique qué corresponde al semiplano superior en esta transformación.

213. Halle la forma general de la transformación homográfica que transforma:

1) el semiplano superior en sí mismo;

2) el semiplano superior en el semiplano inferior;

3) el semiplano superior en el semiplano de la derecha.

214. Halle la transformación del semiplano superior en sí mismo con la siguiente condición de normalización:

1) $w(0) = 1$, $w(1) = 2$, $w(2) = \infty$; 2) $w(0) = 1$, $w(i) = 2i$.

Observación. Acerca de la transformación del semiplano superior en sí mismo con otra condición de normalización véase el problema 226.

215. Halle la función $w(z)$ que transforma el círculo $|z| < R$ en el semiplano de la derecha $\operatorname{Re} w > 0$ de modo que $w(R) = 0$, $w(-R) = \infty$ y $w(0) = 1$. ¿Cuál será en esta transformación la imagen del semicírculo superior?

Dos puntos P_1 y P_2 se llaman simétricos respecto a una circunferencia K de centro O y radio R, si se encuentran sobre un mismo rayo que nace en O y

$$OP_1 \cdot OP_2 = R^2.$$

216. Halle los puntos simétricos al punto $2+i$ respecto a las circunferencias: 1) $|z|=1$; 2) $|z-i|=3$.

217. Halle la imagen simétrica respecto a la circunferencia unidad de las curvas siguientes:

1) $|z|=\frac{1}{2}$; 2) $|z-1|=1$; 3) $y=2$;

4) $|z-z_0|=|z_0|$ $(z_0=x_0+iy_0)$;

5) $|z-z_0|=\sqrt{|z_0|^2-1}$ $(|z_0|>1)$;

6) la hipérbola $x^2-y^2=1$;

7) la frontera del triángulo rectilíneo con vértices z_1, z_2 y z_3 $(z_k \neq 0)$.

218. Demuestre que para la simetría de los puntos P_1 y P_2 respecto a la circunferencia K es necesario y suficiente que se verifique una de las dos condiciones siguientes:

1) toda circunferencia K_1 que pasa por los puntos P_1 y P_2 sea ortogonal a K;

2) $\frac{MP_1}{MP_2}=\text{const}$ para todo punto M de la circunferencia K (es decir, K es una circunferencia de Apolonio respecto a los puntos P_1 y P_2).

---

219. La función $w=e^{i\alpha}\frac{z-\beta}{z-\bar{\beta}}$ $(\beta=a+ib,\ b>0)$ transforma el semiplano superior en el círculo unidad:

1) halle $\arg w(x)=\theta(x)$;

2) halle $w'(\beta)$;

3) explique qué parte del semiplano superior se contrae y qué parte se dilata.

220. Transforme el semiplano superior $\operatorname{Im} z>0$ en el círculo unidad $|w|<1$ de manera que:

1) $w(i)=0$, $\arg w'(i)=-\frac{\pi}{2}$; 2) $w(2i)=0$, $\arg w'(2i)=0$;

3) $w(a+bi)=0$, $\arg w'(a+bi)=\theta$ $(b>0)$.

221. Transforme el semiplano superior $\operatorname{Im} z>0$ en el círculo $|w-w_0|<R$ de manera que el punto i corresponda al centro del círculo y la derivada en este punto sea positiva.

222. Transforme el círculo $|z|<2$ en el semiplano $\operatorname{Re} w>0$ de manera que $w(0)=1$ y $\arg w'(0)=\pi/2$.

223. Transforme el círculo $|z-4i|<2$ en el semiplano $v>u$ de manera que al centro del círculo corresponda el punto -4 y al punto $2i$ de la circunferencia, el origen de coordenadas.

224. Halle la forma general de la función homográfica $w(z)$ que transforma el círculo $|z| < 1$ en el semiplano de la derecha $\operatorname{Re} w > 0$ de manera que $w(z_1) = 0$ y $w(z_2) = \infty$, donde z_1 y z_2 son dos puntos dados de la circunferencia $|z| = 1$, tales, que $\arg z_1 < \arg z_2$.

Construya la familia de curvas del círculo $|z| < 1$, correspondiente a la red polar del semiplano $\operatorname{Re} w > 0$.

Sugerencia. Recurra a la forma general de la transformación homográfica para tres pares de puntos correspondientes y halle $\arg \frac{e^{i\varphi} - z_1}{e^{i\varphi} - z_2}$.

225. Halle el centro w_0 y el radio R de la circunferencia en la que se transforma el eje real mediante la función $w = \frac{z - z_1}{z - z_2}$ ($\operatorname{Im} z_2 \neq 0$).

226. Halle la función que transforma el semiplano superior en sí mismo de manera que $w(a) = b$ y $\arg w'(a) = \alpha$ ($\operatorname{Im} a > 0$, $\operatorname{Im} b > 0$).

Sugerencia. Transforme previamente, con la correspondiente condición de normalización, ambos ejemplares del semiplano en el círculo unidad.

227. Transforme el semiplano superior en el inferior de manera que $w(a) = a$ y $\arg w'(a) = -\frac{\pi}{2}$ ($\operatorname{Im} a > 0$).

228. Dada la función $w = e^{i\alpha} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$ ($|a| < 1$) que transforma el círculo unidad en sí mismo:

1) halle $\arg w(e^{i\varphi}) = \theta(\varphi)$;
2) halle $w'(0)$ y $w'(a)$;
3) explique qué parte del círculo unidad se contrae y qué parte se dilata;
4) halle máx $\left|\frac{dw}{dz}\right|$ y mín $\left|\frac{dw}{dz}\right|$ para $|z| \leqslant 1$.

229. Transforme el círculo $|z| < 1$ en el círculo $|w| < 1$ de manera que:

1) $w\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, $\arg w'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$; 2) $w\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, $\arg w'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$;

3) $w(0) = 0$, $\arg w'(0) = -\frac{\pi}{2}$; 4) $w(a) = a$, $\arg w'(a) = \alpha$.

230. Transforme el círculo $|z| < R_1$ en el círculo $|w| < R_2$ de manera que $w(a) = b$ y $\arg w'(a) = \alpha$ ($|a| < R_1$, $|b| < R_2$).

231. Transforme el círculo $|z| < 1$ en el círculo $|w - 1| < 1$ de manera que $w(0) = 1/2$ y $w(1) = 0$.

232. Transforme el círculo $|z - 2| < 1$ en el círculo $|w - 2i| < 2$ de manera que $w(2) = i$ y $\arg w'(2) = 0$.

233. Halle la forma general de la función homográfica $w(z)$ que transforma el círculo $|z| < R$ en sí mismo y verifica las condiciones siguientes:

1) $w(a) = 0$ ($|a| < R$); 2) $w(a) = b$ ($|a| < R$, $|b| < R$);
3) $w(\pm R) = \pm R$.

234. Transforme el círculo $|z| < 1$ en sí mismo de manera que dos puntos interiores dados z_1 y z_2 correspondan a los puntos $\pm a (0 < a < 1)$; halle a.

Sugerencia. Emplee el resultado del problema 233, 2) y la identidad del problema 10.

235. Transforme el círculo $|z| < 1$ en sí mismo de manera que el segmento $y = 0$, $0 \leqslant x \leqslant a (a < 1)$ del eje real corresponda a un segmento del eje real simétrico respecto al origen de coordenadas. Halle la longitud del segmento transformado.

236. Demuestre que una transformación lineal que transforma un circulo en un círculo queda determinada unívocamente al especificar las imágenes de un punto interior y de un punto de la frontera.

237. El círculo unidad se transforma en sí mismo de manera que el punto $z_0 \neq 0$ pasa al centro del círculo. Demuestre que en tal caso una semicircunferencia unidad se transforma en una semicircunferencia si, y sólo si, sus extremos se encuentran sobre el diámetro que pasa por el punto z_0.

238. Construya la transformación del círculo unidad en si mismo en la que la preimagen del centro se encuentra sobre el eje real y el arco $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$ de la circunferencia unidad se transforma en los siguientes arcos:

1) $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$; 2) $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{3}$; 3) $\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{7\pi}{6}$.

§ 2. CUESTIONES COMPLEMENTARIAS DE LA TEORIA DE TRANSFORMACIONES LINEALES

FORMAS CANÓNICAS DE TRANSFORMACIONES LINEALES

Una transformación homográfica con un punto inmóvil z_0 se denomina *parabólica*. Una transformación parabólica puede ser representada en la forma canónica

$$\frac{1}{w - z_0} = \frac{1}{z - z_0} + h,$$

si $z_0 \neq \infty$, ó

$$w = z + h,$$

si $z_0 = \infty$.

Una transformación homográfica con dos distintos puntos inmóviles z_1 y z_2 tiene la forma canónica

$$\frac{w - z_1}{w - z_2} = k \frac{z - z_1}{z - z_2},$$

si $z_1 \neq \infty$, $z_2 \neq \infty$ y $w - z_1 = k (z - z_1)$, si $z_2 = \infty$; una transformación con dos distintos puntos inmóviles se denomina *hiperbólica*, si $k > 0$, *elíptica*, si $k = e^{i\alpha}$ y $\alpha \neq 0$, y *loxodrómica*, si $k = ae^{i\alpha}$, donde $a \neq 1$ y $\alpha \neq 0$ (α y a son números reales, $a > 0$).

239. Demuestre las siguientes proposiciones:

1) La transformación homográfica general $w=\frac{az+b}{cz+d}$ puede ser reducida a la forma $w=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$, donde $\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}=1$.

2) Si $\alpha+\delta$ es un número real, la transformación es elíptica, cuando $|\alpha+\delta|<2$; hiperbólica, cuando $|\alpha+\delta|>2$, y parabólica, cuando $|\alpha+\delta|=2$.

3) Si $\operatorname{Im}(\alpha+\delta)\neq 0$, la transformación es loxodrómica.

240. Demuestre que si una transformación lineal tiene dos puntos inmóviles, el producto de las derivadas en estos puntos es igual a la unidad.

241. Halle las circunferencias que en la transformación parabólica $\frac{1}{w-z_0}=\frac{1}{z-z_0}+n$ corresponden a sí mismas.

242. Halle la forma general de la transformación parabólica del círculo $|z|<R$ en sí mismo, si el punto R es inmóvil.

243. Demuestre las siguientes propiedades de la transformación hiperbólica:

1) Toda circunferencia que pasa por los dos puntos inmóviles se transforma en sí misma, conservándose el sentido del recorrido.

2) Toda circunferencia ortogonal a las circunferencias que pasan por los puntos inmóviles se transforma en una circunferencia que verifica la misma propiedad. (Esta propiedad se deduce directamente de la propiedad 1).

Sugerencia. Analice primero el caso en que los puntos inmóviles son 0 y ∞.

244. Demuestre que dada una transformación elíptica:

1) Toda circunferencia ortogonal a las circunferencias que pasan por los dos puntos inmóvoles se transforma en sí misma, conservándose el sentido del recorrido.

2) Un arco circular que une los puntos inmóviles se transforma en un arco circular que une los puntos inmóviles y forma un ángulo α con el primer arco ($\alpha=\arg k$).

245. a) Demuestre que para una transformación loxodrómica se conservan las propiedades 2) de las transformaciones hiperbólicas (véase el problema 243) y elípticas (véase el problema 244).

2) Demuestre que para una transformación loxodrómica no existen circunferencias inmóviles, siempre que $\alpha\neq\pi$ ($\alpha=\arg k$). Demuestre que, siendo $\alpha=\pi$, las circunferencias que pasan por los puntos inmóviles se transforman en sí mismas alterándose el sentido del recorrido.

246. Demuestre que para la transformación loxodrómica $w=ae^{i\alpha}z$ las espirales logarítmicas $r=Ae^{\frac{\ln a}{\alpha}\varphi}$ $(A>0)$ se transforman en sí mismas.

247. Demuestre que la transformación lineal $w = e^{i\lambda}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ $(a = |a|e^{i\alpha},\ |a| < 1)$, que transforma el círculo unidad en sí mismo, puede ser solamente o bien elíptica, o bien parabólica, o bien hiperbólica. Explíque para qué valores de a tiene lugar cada uno de los casos señalados. Encuentre los puntos inmóviles de la transformación y redúzcala a la forma canónica.

ALGUNAS FÓRMULAS DE APROXIMACIÓN PARA TRANSFORMACIONES LINEALES

248. El semiplano superier se transforma en el círculo unidad de manera que el punto $z = hi$ $(h > 0)$ pasa al centro del círculo. Halle la longitud Γ de la imagen del segmento $[0, a]$ del eje real $(a > 0)$ y obtenga las fórmulas lineales de aproximación de Γ para pequeños valores de a/h y para pequeños valores de h/a.

249. El círculo unidad se transforma en sí mismo de manera que la preimagen del centro del circulo — el punto x_0 — se encuentra sobre el eje real. Halle la longitud Γ de la imagen del arco $0 \leqslant \varphi \leqslant \gamma$ de la circunferencia-unidad $(\gamma \leqslant \pi)$. ¿Cóma varía la magnitud Γ/γ en dependencia del signo de x_0?

250. En las condiciones del problema 249 obtenga las fórmulas:

1) $\Gamma = \frac{1+x_0}{1-x_0}\gamma + O(\gamma^3)$ para pequeños valores de γ;

2) $\Gamma = \pi - \varepsilon \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} - \frac{\varepsilon^2}{2}\operatorname{ctg}^2\frac{\gamma}{2} + O(\varepsilon^3)$ para pequeños valores de ε, donde $\varepsilon = 1 - x_0$.

251. El círculo unidad se transforma en sí mismo de manera que el punto $z_0 = r_0 e^{i\varphi_0}$, pasa al centro. Los puntos $z_1 = d^{i\varphi_1}$ y $z_2 = e^{i\varphi_2}$ se encuentran a un mismo lado del diámetro que pasa por el punto z_0 $(\varphi_0 < \varphi_1 < \varphi_2 \leqslant \varphi_0 + \pi)$. Aceptando que el punto z_0 es próximo a la circunferencia unidad, demuestre que para la longitud Γ de la imagen del arco $\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2$ de la circunferencia unidad es válida la fórmula

$$\Gamma = \varepsilon\left[\operatorname{ctg}\frac{\varphi_2-\varphi_0}{2} - \operatorname{ctg}\frac{\varphi_1-\varphi_0}{2}\right] + \frac{\varepsilon^2}{2}\left[\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi_1-\varphi_0}{2} - \operatorname{ctg}^2\frac{\varphi_2-\varphi_0}{2}\right] + O(\varepsilon^3),$$

donde $\varepsilon = 1 - r_0$.

TRANSFORMACIONES DE RECINTOS BICONEXOS ELEMENTALES

252. Demuestre que, si la transformación lineal del círculo $|z| < 1$ en sí mismo no se reduce a una rotación, no existe anillo concéntrico alguno de centro en el origen de coordenadas que se transforme en un anillo concéntrico.

Obsrevación. Esta proposición es un caso particular del siguiente teorema: Para que exista una transformación conforme del anillo $r_1 < |z| < r_2$ en el anillo $R_1 < |w| < R_2$ es necesario y suficiente que se cumpla la condición $R_2/R_1 = r_2/r_1$. Además, en este caso la función que realiza la transformación puede tener sólo

dos formas: o bien $w = az$ o bien $w = a/z$. La transformación queda determinada unívocamente al especificar un par de puntos frontera correspondientes (véase, por ejemplo, [2, cap. II, § 3])

253. 1) Transforme el anillo $2 < |z| < 5$ en el anillo $4 < |w| < 10$ de manera que $w(5) = -4$.

2) Transforme el anillo $1 < |z-2i| < 2$ en el anillo $2 < |w-3+2i| < 4$ de manera que $w(0) = -1-2i$.

Tiene lugar el siguiente teorema:

Toda región biconexa, cuyas fronteras no degeneran en puntos, puede ser transformada conformemente en un anillo concéntrico con la razón bien definida μ de los radios de las circunferencias interior y exterior (μ se denomina *módulo* del recinto biconexo).

254. Transforme el semiplano $\operatorname{Re} z > 0$ sin el círculo $|z-h| < R$ $(h > R)$ en el anillo $\rho < |w| < 1$ de manera que el eje imaginario se convierta en la circunferencia $|w| = 1$. Halle ρ.

Sugerencia. Construya la circunferencia de centro en el origen de coordenadas y ortogonal a la circunferencia $|z-h| = R$; encuentre la transformación lineal que transforma el eje real y la circunferencia construida en dos rectas que se intersecan (ortogonalmente) y compruebe que el recinto considerado se transforma en este caso en un anillo concéntrico. Demuestre que el centro de este anillo coincide con el origen de coordenadas, si los puntos de intersección de la circunferencia construida en el eje real pasan a 0 y al ∞.

255. Transforme el semiplano $\operatorname{Re} z > 0$ sin el círculo $|z-h| < 1$, $h > 1$, en el anillo $1 < |w| < 2$. Halle h.

256. Transforme el anillo excéntrico comprendido entre las circunferencias $|z-3| = 9$ y $|z-8| = 16$ en el anillo $\rho < |w|$ 1. Halle ρ.

257. Transforme el recinto biconexo comprendino entre las circunferencias $|z-z_1| = r_1$ y $|z-z_2| = r_2$ (donde o bien $|z_2|-|z_1| > r_1+r_2$ o bien $|z_2-z_1| < |r_2-r_1|$) en un anillo circular concéntrico de centro en el origen de coordenadas. Halle el módulo (μ) del recinto.

Sugerencia. Halle un par de puntos simétricos respecto a ambas circunferencias y transforme uno de ellos en 0 y otro en el ∞.

Observación. Es fácil ver que el método de solución recomendado en las sugerencias a los problemas 254 y 257 es el mismo.

258. Empleando la solución del problema anterior, halle los módulos de los recintos biconexos comprendidos entre las circunferencias dadas:

1) $|z-i| = 2$, $|z+i| = 5$; 2) $|z-3i| = 1$, $|z-4| = 2$.

PROPIEDADES DE GRUPO DE TRANSFORMACIONES HOMOGRAFICAS

La transformación $T(z) = T_2[T_1(z)]$ se denomina *producto* de las transformaciones T_1 y T_2 y se denota en la forma $T = T_2T_1$ (el orden tiene importancia ya que, en general, $T_2T_1 \neq T_1T_2$). El conjunto G de transformaciones T forma *un grupo*, si contiene el producto de dos cualesquiera transformaciones pertenecientes a él y si junto a la transformación T contiene la transformación T^{-1} inversa a ésta. El grupo compuesto por las potencias T^n y T^{-n} de una transformación T se denomina *cíclico*. Si el grupo G se obtiene a partir de las trans-

formaciones $T_1, T_2, \ldots, T_n$ construyendo todas las transformaciones inversas, todos los productos de las transformaciones dadas y todas las transformaciones inversas a los mismos, se dice que estas transformaciones *generan* el grupo G. Los puntos que se obtienen a partir de un punto fijo z mediante todas las transformaciones del grupo G se denominan *equivalentes* o *congruentes* respecto al grupo G.

Se llama *recinto fundamental* del grupo G a todo recinto (conexo o no conexo) que no contiene ningún par de puntos equivalentes uno al otro respecto al grupo dado y tal que una vecindad de todo punto frontera contiene puntos equivalentes a los puntos del recinto.

259. Sean T_i transformaciones lineales:

$$T_i(z)=\frac{a_iz+b_i}{c_iz+d_i},\quad \Delta_i=\begin{vmatrix}a_i & b_i\\ c_i & d_i\end{vmatrix}\neq 0\ (s=1,\ 2,\ \ldots).$$

Demuestre las siguientes proposiciones:

1) $T=T_1T_2$ es una transformación lineal con determinante $\Delta=\Delta_1\Delta_2$.

2) El producto de las transformaciones es asociativo, es decir,

$$(T_3T_2)T_1=T_3(T_2T_1).$$

3) Para toda transformación T_1 existe la inversa T_i^{-1}, es decir,

$$T_iT_i^{-1}=T_i^{-1}T_i=J,$$

donde $J(z)\equiv z$ es la transformación idéntica.

4) El producto de transformaciones no es, en general, conmutativo (dé ejemplos).

260. Demuestre que las transformaciones

$$T_1=z,\ T_2=\frac{1}{z},\ T_3=1-z,\ T_4=\frac{1}{1-z},\quad T_5=\frac{z-1}{z},\quad T_6=\frac{z}{z-1}$$

forman un grupo (el grupo de *razones anarmónicas*).

261. Demuestre que es grupo cíclico el conjunto de transformaciones lineales consistentes en la rotación del plano alrededor del origen de coordenadas en ángulos múltiplos de α. ¿En qué caso este grupo estará compuesto por un número finito de transformaciones?

262. 1) Demuestre que el conjunto de transformaciones de la forma $w=\frac{az+b}{cz+d}$, donde a, b, c y d son números reales enteros y $ad-bc=1$, es un grupo (este grupo se denomina *modular*).

2) Demuestre que, si a, b, c y d son números enteros complejos (es decir, números de forma $m+ni$, donde m y n son números reales enteros) que satisfacen la condición $ad-bc=1$, el conjunto de transformaciones del punto 1) también constituye un grupo (*el grupo Picard*).

263. Halle los recintos fundamentales de los grupos generados por las transformaciones:

1) $T(z)=e^{2\pi i/n}z$ (n es un número natural); 2) $T_1(z)=e^{2\pi i/n}z$, $T_2=\frac{1}{z}$; 3) $T(z)=z+\omega$; 4) $T_1(z)=z+\omega$, $T_2(z)=-z$; 5) $T_1(z)=$

$= z+\omega_1, \quad T_2(z) = z+\omega_2 \left(\operatorname{Im}\frac{\omega_2}{\omega_1} \neq 0\right)$ (grupo *doblemente periódico*); 6) $T_1(z) = z+\omega_1, \quad T_2(z) = z+\omega_2, \quad T_3(z) = -z$; 7) $T_1(z) = z+\omega$; $T_2(z) = iz$; 8) $T_1(z) = z+\omega, T_2(z) = e^{2\pi i/3}z$; 9) $T_1(z) = z+\omega, T_2(z) = e^{2\pi i/6}z$.

264. Halle los grupos de transformaciones lineales que corresponden en la proyección estereográfica a la rotación de la esfera

1) alrededor del diámetro vertical;

2) alrededor del diámetro paralelo al eje real;

3) alrededor del diámetro paralelo al eje imaginario;

4) alrededor de aquel diámetro para el que el punto a es la proyección estereográfica de uno de sus extremos.

Sugerencia. Si z_1 y z_2 son las imágenes de puntos de la esfera diametralmente opuestos, se tiene $z_1\bar{z}_2 = -1$ (véase el problema 49).

265. 1) Demuestre que el grupo de transformaciones lineales, que corresponden a la rotación de la esfera y que transforman los puntos con las proyecciones estereográficas a y b uno en otro, se define mediante la relación

$$\frac{w-b}{1+\bar{b}w} = e^{i\alpha}\frac{z-a}{1+\bar{a}z}.$$

2) Demuestre que la diferencial $ds = \frac{|dz|}{1+|z|^2}$ es invariante respecto a las transformaciones de este grupo y representa la longitud esférica del elemento de arco dz (es decir, la longitud de la imagen de este elemento en la esfera).

TRANSFORMACIONES LINEALES Y LA GEOMETRIA DE LOBACHEVSKI

Cuando la geometría de Lobachevski se interpreta en el círculo unidad $|z| < 1$, el papel de las rectas lo desempeñan los arcos de las circunferencias *ortogonales a la circunferencia unidad pertenecientes a este círculo;* el papel del movimiento lo desempeñan las transformaciones lineales del círculo unidad en sí mismo y el papel de la distancia entre los puntos z_1 y z_2 lo desempeña la magnitud $\rho(z_1, z_2) = \frac{1}{2}\ln(\alpha, \beta, z_2, z_1)$, donde α y β son los puntos de intersección de la "recta" que pasa por los puntos z_1 y z_2 con la circunferencia unidad (el orden de los puntos es el siguiente: α, z_1, z_2, β), mientras que $(\alpha, \beta, z_1, z_2)$ es la razón anarmónica de los puntos señalados. Los ángulos se miden igual que en la geometría de Euclides (véase, por ejemplo, [I, cap. II, § 4, nº 8]).

266. Demuestre que $\rho(z_1, z_2) > 0$, si $z_1 \neq z_2$, y que $\rho(z, z) = 0$.

267. Demuestre que $\rho(z_1, z_2) \leqslant \rho(z_1, z_3) + \rho(z_3, z_2)$ y que el signo de igualdad debe tomarse si, y sólo si, el punto z_3 se encuentra en el "segmento" que une los puntos z_1 y z_2.

268. Demuestre que, si uno de los puntos z_1 o z_2 tiende hacia un punto de la circunferencia unidad (o ambos tienden hacia diferentes puntos de la circunferencia unidad), la longitud no eucli-

diana $\rho(z_1, z_2)$ tiende hacia el infinito (es decir, los puntos de la circunferencia unidad corresponden a los puntos del infinito del plano no euclidiano).

269. Demuestre que la diferencial $ds=\frac{|dz|}{1-|z|^2}$ $(|z|<1)$ es invariante respecto al grupo de transformaciones lineales que transforman el círculo $|z|<1$ en sí mismo y representa la longitud no euclidiana del elemento de arco dz.

Sugerencia. Obtenga la forma general de la transformación del círculo $|z|<1$ en sí mismo que transforma el punto a en el punto b ($|a|<1$, $|b|<1$).

270. Indique métodos de construcción de las siguientes curvas:
1) del haz de "rectas" que pasan por el punto z_0;
2) de la "recta" que pasa por los puntos z_1 y z_2;
3) de la equidistante de una "recta" (es decir, del lugar geométrico de los puntos "equidistantes" de la "recta" dada);
4) de las curvas límite (es decir, de las curvas ortogonales a un haz de "rectas paralelas").

271. 1) Demuestre que para un triángulo "rectilíneo" de ángulos φ_1, φ_2 y φ_3 es válida la desigualdad

$$\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3<\pi.$$

2) Demuestre que, salvo un "movimiento", un triángulo "rectilíneo" se define mediante sus ángulos φ_1, φ_2 y φ_3. Construya el triángulo "rectilíneo" a partir de sus ángulos.

§ 3. FUNCIONES RACIONALES Y ALGEBRAICAS

La transformación general de un círculo o de un semiplano en un recinto simplemente conexo del w—plano es de la forma $w=\varphi[l(z)]$, donde $\varphi(z)$ es una transformación particular y l es una transformación homográfica cualquiera del círculo o del semiplano en sí mismo (la transformación inversa es de la forma $z=l[\psi(w)]$). Es necesario tener en cuenta esta observación siempre que se busque una transformación normada, es decir, una transformación que verifique determinadas condiciones complementarias. Si no se señalan las condiciones de normalización, en la respuesta se indica, generalmente, una de las funciones transformadoras.

Un papel importante en la construcción práctica de las transformaciones conformes lo desempeñan ciertos principios generales (véase, por ejemplo, [1, cap. VIII, § 7 n° 1 y cap. V, § 3, n° 6] o [2, cap. II, §§ 1 y 3]).

Principio de simetría de Riemann-Schwarz

Sea D_1 un recinto, cuya frontera contiene un arco C de una circunferencia (en particular, un segmento rectilíneo), y sea $\omega=f_1(z)$ una función que realiza la transformación conforme de este recinto en un recinto D_1^* de manera que el arco C se transforma de nuevo en un arco de una circunferencia o en un segmento rectilíneo C^*. Entonces, la función $f_2(z)$, que en los puntos simétricos respecto a C toma valores simétricos a los valores de $f_1(z)$ respecto a C^* [1],

[1] Si C y C^* son segmentos de los ejes reales (esto siempre se puede lograr realizando transformaciones homográficas complementarias), se tiene $f_2(z)=\overline{f_1(\bar{z})}$.

será analítica en el recinto D_2 simétrico al recinto D_1 respecto a C y lo transformará en un recinto D_2^* simétrico a D_1^* respecto a C^*.

La función

$$w=\begin{cases} f_1(z) & \text{en } D_1 \\ f_1(z)=f_2(z) & \text{en } C, \\ f_2(z) & \text{en } D_2 \end{cases}$$

realiza la transformación conforme del recinto D_1+C+D_2 en el recinto $D_1^*+C^*+D_2^*$ [1].

Principio de correspondencia de fronteras

Sean D y D^* dos recintos simplemente conexos y sean C y C^* sus fronteras, con la particularidad de que el recinto D^* pertenece íntegramente a una parte finita del plano. Si la función $w=f(z)$ es analítica en D y continua en $\overline{D}$ y realiza una transformación biunívoca de C en C^* conservando el sentido del recorrido, realiza una transformación biunívoca y conforme del recinto D en D^*.

Al resolver los problemas de este parágrafo, así como del siguiente, se recomienda, en los casos en que la transformación se realiza mediante una rama de una función multiforme, vigilar la correspondencia de los puntos de las fronteras del recinto que se transforma y de su imagen (esto se refiere especialmente a los problemas de transformación de recintos con cortes).

272. Mediante la función $w=z^2$ y su inversa halle la transformación conforme de los siguientes recintos:

1) del interior de la rama derecha de la hipérbola equilateral $x^2-y^2=a^2$ en el semiplano superior;

2) del exterior de la parábola $y^2=2px$, $p>0$ (es decir, del recinto limitado por esta parábola que no contiene su foco) en el semiplano superior.

Observación. Acerca de la transformación de recintos limitados por curvas de segundo grado, véanse también los problemas **302**, **303**, **330—332** y **367**.

273. Empleando las funciones del problema anterior, transforme:

1) el interior de la circunferencia $r=a\cos\varphi$ $(a>0)$ en el interior de la cardioide $\rho=\frac{1}{2}(1+\cos\theta)$;

2) el interior de la misma circunferencia en el interior de la rama derecha de la lemniscata $\rho=\sqrt{\cos 2\theta}$;

3) en el círculo $|z|<1$ en el interior de la cardioide $\rho=A(1+\cos\theta)$, $A>0$, de manera que sea $w(0)=A/8$ y $w'(0)>0$.

274. Halle el recinto en el que la función $w=R(z+mz^2)$, $R>0$, $0\leqslant m\leqslant 1/2$ transforma el círculo $|z|<1$. Halle las imágenes de la red polar del z—plano.

275. Halle el recinto en el que la función $w=z+z^2$ transforma el semicírculo $|z|<1$, $\operatorname{Re} z>0$.

276. 1) Halle el recinto en el que la función $w=R\left(z+\frac{z^n}{n}\right)$, $R>0$, n es un número entero, $n>1$, transforma el círculo $|z|<1$.

[1] La transformación será biunívoca, siempre que los recintos D_1 y D_2, así como D_1^* y D_2^* no se intersequen.

2) Halle el recinto en el que la función $w=R\left(z+\frac{1}{nz^n}\right)$, $R>0$, n un es número entero, $n>1$, transforma el exterior del círculo unidad $|z|>1$.

Observación. Acerca de las transformaciones que realiza la función

$$w=R\left(z+\frac{1}{z}\right)$$

(función de *Zhukovski*) véanse el problema 298 y los siguientes.

277. 1) Analice para qué valores de m la función $w=R(z+mz^n)$, donde n es un número natural, realiza una transformación conforme del círculo $|z|<1$ en un determinado recinto y halle este recinto.

2) Analice estas mismas cuestiones para la transformación del exterior del círculo $|z|<1$ mediante la función $w=R\left(z+\frac{m}{z^n}\right)$ y del interior del mismo círculo mediante la función $w=R\left(\frac{1}{z}+mz^n\right)$.

TRANSFORMACIONES DE LUNULAS CIRCULARES
Y DE RECINTOS CON CORTES

278. 1) Transforme el ángulo $0<\arg z<\pi\alpha\,(0<\alpha\leqslant 2)$ en el semiplano superior.

2) Transforme el ángulo $-\frac{\pi}{4}<\arg z<\frac{\pi}{2}$ en el semiplano superior de manera que $w(1-i)=2$, $w(i)=-1$, $w(0)=0$.

279. Halle la función $w(z)$ que transforma el semicírculo $|z|<1$, $\operatorname{Im} z>0$ en el semiplano superior y que verifica las condiciones:

1) $w(-1)=0$, $w(0)=1$, $w(1)=\infty$;
2) $w(\pm 1)=\pm 1$, $w(0)=\infty$;
3) $w\left(\frac{i}{2}\right)=i$, $\arg w'\left(\frac{i}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}$.

280. Halle la función $w(z)$ que transforma el semicírculo $|z|<1$, $\operatorname{Im} z>0$ en el círculo $|w|<1$ y que verifica las condiciones:

1) $w(\pm 1)=\pm 1$, $w(0)=-i$; 2) $w\left(\frac{i}{2}\right)=0$, $\arg w'\left(\frac{i}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$.

281. Halle la función $w(z)$ que transforma el recinto $|z|>1$, $\operatorname{Im} z>0$ en el semiplano superior.

282. Transforme en el semiplano superior:
1) el sector $|z|<R$, $0<\arg z<\pi\alpha$ $(0<\alpha\leqslant 2)$;
2) el recinto $|z|>R$, $0<\arg z<\pi\alpha$ $(0<\alpha\leqslant 2)$.

283. Transforme en el semiplano superior las siguientes lúnulas circulares (biángulos):
1) $|z|<1$, $|z-i|<1$; 2) $|z|<1$, $|z-i|>1$;
3) $|z|>1$, $|z-i|<1$; 4) $|z|>1$, $|z-i|>1$;
5) $|z|>2$, $|z-\sqrt{2}|<\sqrt{2}$.

284. Transforme en el semiplano superior el exterior del semicírculo unidad superior.

En los problemas **285—296** transforme los recintos indicados en el semiplano superior.

285. El plano con un corte a lo largo del segmento $[-1, 1]$.

286. El plano con un corte a lo largo del segmento $[-i, i]$.

287. El plano con un corte a lo largo del segmento $[z_1, z_2]$.

288. El plano con cortes a lo largo de los rayos $(-\infty, -R]$ y $[R, \infty)$ $(R > 0)$.

289. El plano con un corte a lo largo del rayo perteneciente al primer cuadrante que parte del punto i y es paralelo a la recta $y = x$.

290. El plano con un corte a lo largo del arco circular que une los puntos -1 y 1 y que pasa por el punto ih, donde $0 < h < 1$.

291. El semiplano $\operatorname{Im} z > 0$ con un corte a lo largo del segmento $[0, ih]$, $h > 0$.

292. El semiplano $\operatorname{Im} z > 0$ con un corte que va desde ih hasta el ∞ a lo largo del semieje imaginario positivo $(h > 0)$.

293. El semiplano $\operatorname{Im} z > 0$ con un corte a lo largo del arco de la circunferencia $|z| = 1$ que va desde el punto $z = 1$ al punto $z = e^{i\alpha}$, donde $0 < \alpha < \pi$.

294. El ángulo $0 < \arg z < z < \pi\beta$, donde $0 < \beta < 2$, con un corte a lo largo del arco de la circunferencia $|z| = 1$ que va desde el punto $z = 1$ al punto $z = e^{i\alpha}$, donde $0 < \alpha < \beta$.

285. El exterior del semicírculo unidad superior con un corte a lo largo del segmento $[0, -i]$ (el exterior de una "pala").

Sugerencia. Mediante una transformación lineal se reduce al problema anterior.

296. 1) El círculo $|z| < 1$ con un corte a lo largo del radio $[0, 1]$.

2) El exterior del círculo unidad con un corte a lo largo del rayo $[1, \infty)$.

297. Halle la transformación del círculo $|z| < 1$ en el w—plano con un corte a lo largo del rayo $\left(-\infty, -\frac{1}{4}\right]$ sujeta a las condiciones $w(0) = 0$ y $w'(0) > 0$.

FUNCION DE ZHUKOVSKI

298. Halle la transformación de la red polar $|z| = R$, $\arg z = \alpha$ mediante la función de Zhukovski $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

299. Halle el recinto en el que la función de Zhukovski transforma:

1) el círculo $|z| < R < 1$; 2) el recinto $|z| > R > 1$; 3) el círculo $|z| < 1$; 4) el recinto $|z| > 1$; 5) el semiplano $\operatorname{Im} z > 0$; 6) el semiplano $\operatorname{Im} z < 0$; 7) el semicírculo $|z| < 1$, $\operatorname{Im} z > 0$; 8) el semicírculo $|z| < 1$, $\operatorname{Im} z < 0$; 9) el recinto $|z| > 1$, $\operatorname{Im} z > 0$; 10) el recinto $1 < |z| < R$, $\operatorname{Im} z > 0$; 11) el recinto $R < |z| < 1$, $\operatorname{Im} z > 0$; 12) el recinto $\frac{1}{R} < |z| < R$, $\operatorname{Im} z > 0$, $\operatorname{Re} z > 0$; 13) el ángulo $\frac{\pi}{2} - \alpha < \arg z < \frac{\pi}{2} + \alpha \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$.

300. Halle la transformación de la red polar mediante las funciones:

1) $w = \frac{i}{2}\left(z - \frac{i}{z}\right)$; 2) $w = \frac{i}{2}\left(z + \frac{a^2}{z}\right)$ $(a > 0)$;

3) $w = \frac{i}{2}\left(z + \frac{c^2}{z}\right)$, $c = |c| e^{i\gamma}$ $(0 \leqslant \gamma < \pi)$.

301. Empleando la función de Zhukovski, transforme:

1) el exterior del segmento $[-c, c]$ $(c > 0)$ en el exterior del círculo unidad de manera que $w(\infty) = \infty$ y $\arg w'(\infty) \alpha$;

2) el exterior de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ en el exterior del círculo unidad de manera que $w(\infty) = \infty$ y $\arg w'(\infty) = 0$.

302. Transforme el semiplano superior sin la semielipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1$, $y > 0$ en el semiplano superior.

303. Transforme el recinto biconexo comprendido entre las elipses confocales $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $\frac{x^2}{a^2 + k^2} + \frac{y^2}{b^2 + k^2} = 1$ $(a > b)$ en un anillo circular concéntrico de centro en el origen de las coordenadas y halle el módulo (véase la pág. 37) del recinto biconexo dado.

304. Halle el recinto en el que la función de Zhukovski transforma el círculo $|z| < 1$ con un corte a lo largo del segmento $[a, 1]$ $(-1 < a < 1)$. Analice los casos en que $a > 0$ y en que $a < 0$.

En los problemas **305—309** transforme los recintos señalados en el semiplano superior.

305. El circulo $|z| < 1$ con un corte a lo largo del segmento $[1/2, 1]$.

306. El círculo $|z| < 1$ con cortes a lo largo del radio $[-1, 0]$ y del segmento $[a, 1]$ $(0 < a < 1)$.

307. El exterior del círculo unidad con cortes a lo largo del segmento $[-a, -1]$ y del rayo $[1, \infty)$, donde $a > 1$.

308. La mitad superior del círculo $|z| < 1$ con un corte a lo largo del segmento $[0, \alpha i]$ $(0 < \alpha < 1)$.

309. La mitad superior del circulo $|z| < 1$ con un corte a lo largo del segmento $[\alpha i, i]$ $(0 < \alpha < 1)$.

310. Transforme el círculo $|z| < 1$ sin el segmento $[(1-h) \times \times e^{i\alpha}, e^{i\alpha}]$ en el círculo unidad del plano w.

311. Transforme el círculo $|z| < 1$ con un corte a lo largo del segmento $[a, 1]$, $0 < a < 1$, en el círculo $|w| < 1$ de manera que $w(0) = 0$ y $w'(0) > 0$. Halle $w'(0)$ y la longitud del arco correspondiente al corte. ¿Para qué valor de a el corte se transformará en una semicircunferencia?

Sugerencia. Es conveniente transformar primero tanto el recinto dado como el círculo $|w| < 1$ en el exterior del segmento.

312. Transforme el círculo $|z| < 1$ con cortes a lo largo de los segmentos $[a, 1]$ y $[-1, -b]$ $(0 < a < 1, 0 < b < 1)$ en el círculo $|w| < 1$ de manera que $w(0) = 0$ y $w'(0) > 0$. Determine $w'(0)$ y las longitudes de los arcos correspondientes a los cortes.

313. Representando la función de Zhukovski en la forma

$$\frac{w-1}{w+1} = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2,$$

halle:

1) la imagen de la circunferencia C, que pasa por los puntos $z = \pm 1$ formando el ángulo α $(-\pi < \alpha < \pi)$ con el eje real en el punto 1, y el recinto en el que se transforma el exterior de esta circunferencia;

2) la imagen de la circunferencia C', que pasa por el punto $z = 1$ formando el ángulo α con el eje real y que contiene en su interior el punto -1, así como el recinto en el que se transforma el exterior de esta circunferencia.

314. Halle las imágenes de las circunferencias y de los recintos del z—plano, de los que se habla en el problema **313**, si la función transformadora $w(z)$ viene dada por la ecuación

$$\frac{w-1}{w+1} = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{2-\delta} \quad (0 < \delta < 2,\ w > 0 \text{ para } z > 1).$$

2) ¿Cuál es en esta transformación la imagen del interior de la circunferencia C?

315. Transforme el exterior del círculo unidad $|z| > 1$ en el w—plano con un corte a lo largo del arco $\arg\frac{w-1}{w+1} = \beta$ $(0 < |\beta| < \pi)$ de manera que $w(\infty) = \infty$ y $\arg w'(\infty) = \alpha$.

En los problemas **316—319** halle los recintos en los que, mediante las funciones indicadas, se transforman los recintos dados.

316. El círculo $|z| < 1$; $w = \frac{z}{z^2+1}$.

317. El semicírculo $|z| < 1$, $\operatorname{Im} z > 0$; $w = \frac{1}{z^2+1}$.

318. El ángulo $0 < \arg z < \frac{\pi}{n}$; $w = \frac{1}{2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right)$.

319. El sector $-\frac{\pi}{n} < \arg z < \frac{\pi}{n}$, $|z| < 1$; $w = \frac{z}{(1+z^n)^{2/n}}$

$(w(z) > 0$ para $z > 0)$.

Sugerencia. Represente la función transformadora en la forma

$$w = F\{f[\varphi(z)]\}, \text{ donde } \varphi(t) = t^n, \ f(t) = \frac{t}{(1+t)^2}, \ F(t) = \sqrt[n]{t} .$$

APLICACION DEL PRINCIPIO DE SIMETRIA

320. 1) Empleando la solución del problema **319** y el principio de simetría halle la imagen del círculo unidad en la transformación $w = \frac{z}{(1+z^n)^{2/n}}$.

2) Halle la función que transforma el interior (y el exterior) del círculo unidad en el exterior de la "estrella"

$$|w| \leqslant 1, \ \arg w = 2\pi k/n \ (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

321. Transforme en el exterior del círculo unidad:

1) todo el plano con cortes a lo largo de los segmentos $[-1, 1]$ y $[-i, i]$ (el exterior de una cruz);

2) todo el plano con cortes a lo largo de los rayos $(-\infty, -1]$, $[1, +\infty)$, $(-i\infty, -i]$ e $[i, +i\infty)$.

322. 1)* Empleando la función del problema **318** transforme el sector $|z| < 1$, $0 < \arg z < \frac{\pi}{n}$ (n es un número entero) en sí mismo de manera que los segmentos de los radios $|z| \leqslant \alpha$, $\arg z = 0$ y $|z| \leqslant \alpha$, $\arg z = \pi/n$ $(0 < \alpha < 1)$ se transformen en los radios correspondientes.

2) Transforme el exterior del círculo unidad con cortes a lo largo de los segmentos $1 \leqslant |z| \leqslant \alpha$, $\arg z = 2k\pi/n$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ en el exterior del círculo unidad.

323. Transforme en el semiplano superior y en el exterior del círculo unidad el exterior de la cruz formada por el segmento $[-a, b]$ del eje real y por el segmento $[-ci, ci]$ del eje imaginario $(a \geqslant 0,\ b \geqslant 0,\ c \geqslant 0,\ a^2 + b^2 + c^2 \neq 0)$.

Sugerencia. Halle la función que transforma el semiplano superior con un corte a lo largo del segmento $[0, ci]$ en el semiplano superior y recurra al principio de simetría según el cual el exterior de la cruz se transforma en todo el plano con un corte a lo largo de un segmento del eje real.

324. Transforme en el semiplano superior el plano con cortes a lo largo del rayo $[-a, +\infty)$ $(a \geqslant 0)$ y a lo largo del segmento $[-ci, ci]$ $(c > 0)$.

Sugerencia. Véase la sugerencia al problema **323**.

325. Transforme en el exterior del círculo unidad el plano con cortes a lo largo de la parte negativa del eje imaginario y a lo largo de la mitad inferior de la circunferencia unidad.

Sugerencia. Mediante una transformación lineal se reduce al problema **321, 1)**.

326. Transforme en el semiplano superior el plano con cortes a lo largo del segmento $[-\alpha i, 0]$ $(\alpha > 1)$ y a lo largo de la mitad inferior de la circunferencia unidad (fig. 2).

Sugerencia. Mediante una transformación lineal se reduce al problema 323.

327. Transforme en el semiplano superior el plano con cortes a lo largo del segmento $[-1, b]$ $(b > -1)$ y a lo largo del arco circular con extremos en los puntos $e^{\pm i\alpha}$ que pasa por el punto $z = -1$ (fig. 3).

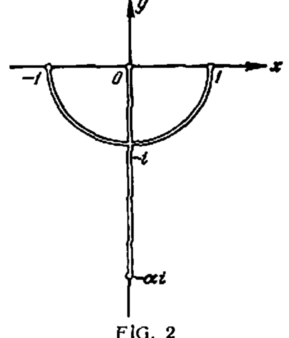


FIG. 2

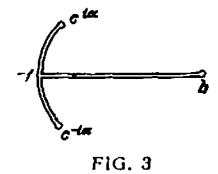


FIG. 3

328. Transforme en el semiplano superior el exterior del círculo unidad con cortes a lo largo de los segmentos: $[i, bi]$, $[-bi, -i]$, $[1, a]$ y $[-a, -1]$ $(a > 1, b > 1)$.

Sugerencia. La función de Zhukovski transforma el recinto considerado en el recinto del problema 323.

329*. Transforme en el exterior del circulo unidad el exterior de la "estrella" representada en la fig. 4.

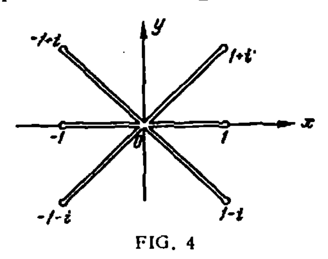


FIG. 4

330*. Transforme en el semiplano superior el interior de la rama derecha de la hipérbola

$$\frac{x^2}{\cos^2\alpha} - \frac{y^2}{\operatorname{sen}^2\alpha} = 1.$$

331. Transforme en el semiplano superior el exterior de la rama derecha de la hipérbola $\frac{x^2}{\cos^2\alpha}-\frac{y^2}{\operatorname{sen}^2\alpha}=1$.

332. Transforme en el semiplano superior el recinto comprendido entre las ramas de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

TRANSFORMACIONES MULTIVALENTES ELEMENTALES

En los problemas **333** y **334** se consideran transformaciones que llevan a recintos multivalentes (superficies de Riemann)[1].

333. Halle los recintos que se obtienen al transformar mediante la función $w=z^2$

1) la parte del anillo $r_1<|z|<r_2$, $0<\arg z<\pi+\alpha$ $(0<\alpha\leqslant\pi)$;
2) el recinto $|z^2-1|<a$ $(0<a<\infty)$.

334. Halle los recintos que se obtienen al transformar mediante la función de Zhukovski $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$

1) el círculo $|z|<R$ $(R>1)$;

Sugerencia. Es conveniente considerar primero las transformaciones del círculo $|z|<1$ y del anillo $1<|z|<R$ (véase el problema **299**).

2) el círculo $\left|\frac{z-i}{z+i}\right|<R$ $(0<R<\infty)$.

Construya las superficies de Riemann de las funciones dadas en los problemas **335—337**.

335. 1) $w=\sqrt{\frac{z-i}{z+i}}$; 2) $w=\sqrt{z^2-1}$.

336. 1) $w=\sqrt{z(z^2+1)}$; 2) $w=\sqrt{\frac{z^2+1}{z}}$. **337.** $\sqrt[3]{z^2-1}$.

§ 4. FUNCIONES TRASCENDENTES ELEMENTALES

FUNCIONES TRASCENDENTES FUNDAMENTALES

338. Explique en qué transforma la función $w=e^z$

1) la red rectangular $x=C$, $y=C$;
2) las rectas $y=kx+b$;
3) la franja $\alpha<y<\beta$ $(0\leqslant\alpha<\beta\leqslant2\pi)$;
4) la franja comprendida entre las rectas $y=x$ e $y=x+2\pi$;
5) la semifranja $x<0$, $0<y<\alpha\leqslant2\pi$;
6) la semifranja $x>0$, $0<y<\alpha\leqslant2\pi$;
7) el rectángulo $\alpha<x<\beta$, $\gamma<y<\delta$ $(\delta-\gamma\leqslant2\pi)$.

---

[1] Aquí se dan solamente algunos problemas elementales de este tipo. El § 2 del capítulo VIII está dedicado especialmente a las superficies de Riemann.

339. ¿Cuál el la preimagen del semiplano superior en la transformación $w=\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$ (n es un número natural)? ¿Cuál es la preimagen límite del semiplano superior para $n\to\infty$?

340. Explique en qué transforma la función $w=\ln z$

1) la red polar $|z|=R$, $\arg z=\theta$;
2) las espirales logarítmicas $r=Ae^{k\varphi}$ $(A>0)$;
3) el ángulo $0<\arg z<\alpha\leqslant 2\pi$;
4) el sector $|z|<1$, $0<\arg z<\alpha\leqslant 2\pi$;
5) el anillo $r_1<|z|<r_2$ con un corte a lo largo del segmento $[r_1 r_2]$.

La parte real y la parte imaginaria de la función

$$w=\xi+i\eta=\ln\frac{a+z}{a-z}$$

se *denominan coordenadas bipolares* del punto $z=x+iy$ respecto a los polos $\pm a$ $(a>0)$.

341. 1) Demuestre que la función w transforma univalentemente todo el z—plano con cortes a lo largo de $(-\infty, -a]$ y $[a, \infty)$ en la franja $-\pi\leqslant\eta\leqslant\pi$ del plano w, con la particularidad de que a las orillas superiores de los cortes corresponde la recta $\eta=\pi$, mientras que a las inferiores, la recta $\eta=-\pi$ (fig. 5).

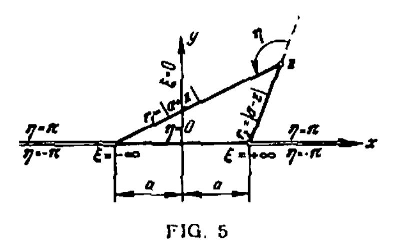


FIG. 5

2) Demuestre la validez de las relaciones:

$$x=\frac{a\,\mathrm{sh}\,\xi}{\mathrm{ch}\,\xi+\cos\eta},\quad y=\frac{a\,\mathrm{sen}\,\eta}{\mathrm{ch}\,\xi+\cos\eta},$$

$$\sqrt{x^2+y^2}=r=a\sqrt{\frac{\mathrm{ch}\,\xi-\cos\eta}{\mathrm{ch}\,\xi+\cos\eta}}.$$

3) Demuestre que las preimágenes de los segmentos $\xi=\xi_0$, $-\pi\leqslant\eta\leqslant\pi$ son las circunferencias de Apolonio

$$(x-a\,\mathrm{cth}\,\xi_0)^2+y^2=\left(\frac{a}{\mathrm{sh}\,\xi_0}\right)^2$$

respecto a los puntos $\pm a$ (la preimagen del segmento $\xi=0$, $-\pi\leqslant\eta\leqslant\pi$ es el eje de ordenadas) (fig. 6).

4) Demuestra que las preimágenes de las curvas $\eta=\eta_0$ son los arcos de las circunferencias

$$x^2+(y+a\operatorname{ctg}\eta_0)^2=\left(\frac{a}{\operatorname{sen}\eta_0}\right)^2,$$

que pasan por los puntos $\pm a$ y que pertenecen al semiplano superior, si $\eta_0>0$, y al semiplano inferior, si $\eta_0<0$. A la línea $\eta=0$ corresponde el segmento $[-a, a]$. Los arcos, correspondientes a los

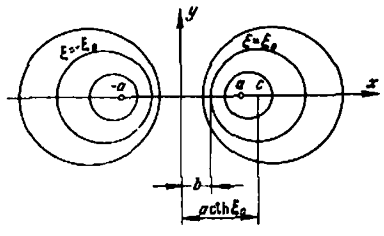


FIG. 6

valores $\eta=\eta_0$ y $\eta=\eta_0-\pi$ ($\eta_0>0$), complementan el uno al otro formando una circunferencia completa (fig. 7).

5) Halle las magnitudes de los segmentos b (véase la fig. 6) y l (véase la fig. 7).

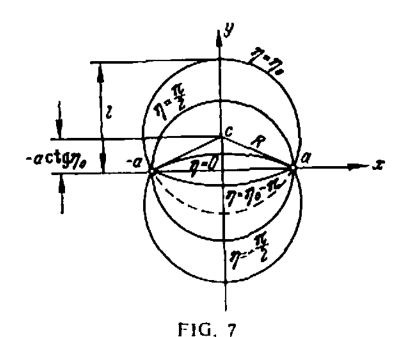


FIG. 7

Observación. La red de coordenadas construida de esta forma en el z-plano se denomina *red bipolar*.

342. Explique en qué transforma la función $w=\cos z$

1) la red rectangular $x=C$, $y=C$;

2) la semifranja $0<x<\pi$, $y<0$;

3) la semifranja $0<x<\frac{\pi}{2}$, $y>0$;

4) la semifranja $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, $y > 0$;

5) la franja $0 < x < \pi$,

6) el rectángulo $0 < x < \pi$, $-h < y < h$ $(h > 0)$.

343. Explique en qué transforma la función $w = \arcsen z$

1) el *semiplano superior*;

2) el plano con cortes a lo largo de los rayos $(-\infty, -1]$ y $[1, \infty)$ del eje real;

3) el primer cuadrante;

4) el semiplano $x < 0$ con un corte a lo largo del rayo $(-\infty, -1]$ del eje real.

344. Explique en qué transforma la función $w = \operatorname{ch} z$

1) la red rectangular $x = C$, $y = C$;

2) la franja $0 < y < \pi$;

3) la semifranja $x > 0$, $0 < y < \pi$.

345. Explique en qué transforma la función $w = \operatorname{Arsh} z$;

1) el plano con cortes a lo largo de los rayos $1 \leqslant y < \infty$ y $-\infty < y \leqslant -1$ del eje imaginario;

2) el primer cuadrante.

346. Explique en qué transforma la función $w = \operatorname{tg} z$

1) la red rectangular $x = C$, $y = C$;

2) la semifranja $0 < x < \pi$, $y > 0$;

3) la franja $0 < x < \pi$;

4) la franja $0 < x < \frac{\pi}{4}$;

5) la franja $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$.

347. Explique en qué transforma la función $w = \operatorname{cth} z$

1) la franja $0 < y < \pi$; 2) la semifranja $0 < y < \pi$, $x > 0$.

TRANSFORMACIONES REDUCIBLES A TRANSFORMACIONES DE FRANJAS Y DE SEMIFRANJAS

Transforme en el semiplano superior los recintos indicados en los problemas **348—353**.

348. La franja comprendida entre las rectas $y = x$ e $y = x + h$.

349. La semifranja $x < 1$, $0 < y < h$.

350. La lúnula circular comprendida entre las circunferencias $|z| = 2$ y $|z - 1| = 1$.

351. El recinto comprendido entre las circunferencias $|z| = 2$ y $|z - 3| = 1$ (el plano con círculos excluidos).

352. El recinto definido por las desigualdades:

$$|z - 1| > 1, \quad |z + 1| > 1, \quad \operatorname{Im} z > 0.$$

(el semiplano superior con semicírculos excluidos).

353. El recinto comprendido entre las parábolas confocales $y^2=4(x+1)$ e $y^2=8(x+2)$.

Sugerencia. Véase el problema 272, 2).

354. Halle la función $w(z)$ que transforma el recinto comprendido entre la circunferencia $|z|=1$ y la recta $\operatorname{Im} z=1$ (el semiplano $\operatorname{Im} z<1$ con el círculo excluido):

1) en el círculo $|w|<1$ con la normalización $w(-3i)=0$ y $\arg w'(-3i)=\frac{\pi}{3}$;

2) en el círculo $|w|<1$ con la normalización $w(-3i)=\frac{-1+i}{2}$ y $\arg w'(-3i)=\frac{\pi}{2}$;

3) en el semiplano superior con la normalización $w(-3i)=1+i$ y $\arg w'(-3i)=\pi$.

APLICACION DEL PRINCIPIO DE SIMETRIA

355. Transforme en el semiplano superior:

1) la franja $0<x<1$ con un corte a lo largo del rayo $x=\frac{1}{2}$, $h\leqslant y<\infty$;

2) la franja $0<x<1$ con cortes a lo largo de los rayos $x=\frac{1}{2}$, $h_1\leqslant y<\infty$ y $x=\frac{1}{2}$, $-\infty<y\leqslant h_2$ $(h_2<h_1)$.

Sugerencia. Transforme primero la franja $0<x<\frac{1}{2}$ en el semiplano superior. La función transformadora, de acuerdo con el principio de simetría, transformará el recinto dado en todo el plano con un corte determinado.

En los problemas 356—366 transforme en el semiplano superior los recintos indicados.

356. La franja $0<x<1$ con un corte a lo largo del segmento $0\leqslant x\leqslant h$, $y=0$ $(h<1)$.

357. La franja $0<x<1$ con cortes a lo largo de los segmentos $0\leqslant x\leqslant h_1$, $y=0$ y $1-h_2\leqslant x\leqslant 1$, $y=0$ $(h_1+h_2<1)$.

358. La semifranja $0<x<\pi$, $y>0$ con un corte a lo largo del segmento $x=\frac{\pi}{2}$, $0\leqslant y\leqslant h$.

359. La semifranja $0<x<\pi$, $y>0$ con un corte a lo largo del rayo $x=\frac{\pi}{2}$, $h\leqslant y<\infty$ $(h>0)$.

360. La semifranja $0<x<\pi$, $y>0$ con cortes a lo largo del segmento $x=\frac{\pi}{2}$, $0\leqslant y\leqslant h_1$ y a lo largo del rayo $x=\frac{\pi}{2}$, $h_2\leqslant y<\infty$ $(h_2>h_1)$.

361. El recinto comprendido entre las circunferencias $|z-1|=1$ y $|z+1|=1$ con un corte a lo largo del rayo $2\leqslant x<\infty$, $y=0$.

362. El recinto comprendido entre las circunferencias $|z-1|=1$ y $|z-2|=2$ con un corte a lo largo del segmento $y=0$, $2\leqslant x\leqslant \leqslant a\,(a<4)$.

363. El recinto comprendido entre las circunferencias $|z-1|=1$ y $|z-2|=2$ con cortes a lo largo de los segmentos $y=0$, $2\leqslant x\leqslant a$ e $y=0$, $b\leqslant x\leqslant 4$ $(a<b)$.

364. El recinto comprendido entre el eje imaginario y la circunferencia $|z-1|=1$ con cortes a lo largo del segmento $y=0$, $2\leqslant x\leqslant a$ y a lo largo del rayo $y=0$, $b\leqslant x<\infty$ $(a<b)$.

365. El recinto comprendido entre las circunferencias $|z-1|=1$ y $|z+1|=1$ con un corte a lo largo del segmento $x=0$, $-\alpha\leqslant \leqslant y\leqslant \beta$ $(\alpha\geqslant 0,\ \beta\geqslant 0)$.

366. El recinto $|z-1|>1$, $|z+1|>1$, $\operatorname{Im} z>0$ (el semiplano superior con semicírculos excluidos) con un corte a lo largo del segmento $x=0$, $0\leqslant y\leqslant h$.

367. Transforme el interior de la parábola $y^2=4\alpha^2(x+\alpha^2)$ en el semiplano superior y en el círculo unidad.

Sugerencia. Haga un corte a lo largo del eje de simetría de la parábola, transforme (mediante la función $\sqrt{z}$) la mitad superior de la parábola en una *semifranja, después en un semiplano y recurra al principio de simetría.*

368*. Transforme en el semiplano superior el semiplano superior con cortes a lo largo de los segmentos $0\leqslant y\leqslant a$, $x=\frac{\pi}{2}+ +k\pi\,(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm\ldots)$ (fig. 8).

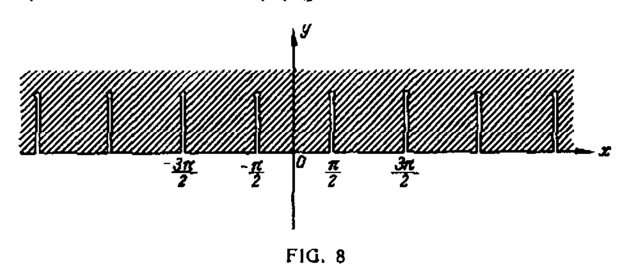


FIG. 8

369. Transforme el plano con cortes paralelos $-a\leqslant x\leqslant a$, $y=\frac{\pi}{2}+k\pi\,(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots)$ en el plano con cortes a lo largo de los segmentos $[k\pi-b,\ k\pi+b]$ $\left(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots;\ 0<b< <\frac{\pi}{2}\right)$ del eje real.

Sugerencia. Haga un corte complementario a lo largo del eje imaginario, transforme uno de los recintos obtenidos en el semiplano superior y recurra al principio de simetría.

370. Transforme en el exterior del círculo unidad el plano con cortes a lo largo de los rayos $\left(-\infty, -\frac{\pi}{2}\right]$ y $\left[\frac{\pi}{2}, +\infty\right)$ y a lo largo de los segmentos $-a \leqslant y \leqslant a$, $x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ (fig. 9).

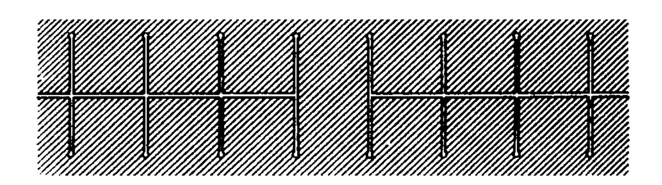


FIG. 9

Sugerencia. La función que resuelve el problema **368** transforma el recinto dado en el plano con cortes a lo largo de los rayos $\left(-\infty, -\frac{1}{\operatorname{arcsen}\frac{1}{\operatorname{ch} a}}\right]$ y $\left[\frac{1}{\operatorname{arcsen}\frac{1}{\operatorname{ch} a}}, +\infty\right)$.

371. Transforme en el semiplano superior el plano con cortes a lo largo de los rayos $(-\infty, p]$ y $[q, +\infty)$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leqslant p < q \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$

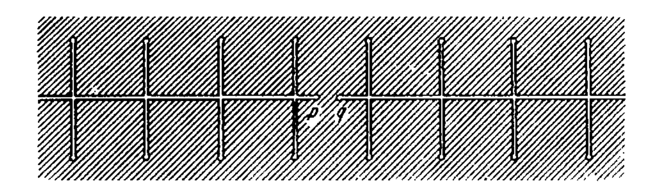


FIG. 10

y a lo largo de los segmentos $-a \leqslant y \leqslant a$, $x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ (fig. 10).

372*. Transforme en el semiplano superior el plano con cortes a lo largo de los rayos $0 \leqslant y < \infty$, $x = \frac{k\pi}{2} (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

En los *problemas* 373—376 *las transformaciones* conducen a recintos multivalentes (véase la llamada de la pág. 49).

373. Halle los recintos en los que transforma la función $w=e^z$
1) el rectángulo $0<x<a$, $0<y<b$;
2) la semifranja $0<x<a$, $y>0$;
3) la franja $0<x<a$.

374. Halle los recintos en los que transforma la función $w=\cos z$
1) la franja $-\pi/2<x<\pi/2$;
2) la franja $0<x<2\pi$.

375. Halle el recinto en el que la función $w=\operatorname{tg} z$ transforma la franja $0<x<2\pi$.

376. Construya la superficie de Riemann en la que la función $w=e^{1/z}$ transforma el z-plano.

§ 5. FRONTERAS DE UNIVALENCIA, CONVEXIDAD Y ESTELARIDAD

Sea $w=f(z)$ una función analítica en el origen de coordenadas y sea $f(0)=0$.

En los problemas 377—385 r_1 es el radio máximo del círculo, de centro en el origen de coordenadas, en el que la función $w=f(z)$ es univalente; r_2 es el radio máximo del círculo, de centro en el origen de coordenadas, que es transformado univalentemente por medio de la función $w=f(z)$ en un recinto convexo, y r_3 es el radio máximo del círculo, de centro en el origen de coordenadas, que es transformado univalentemente por medio de la función $w=f(z)$ en un recinto estelar respecto al punto $w=0$. (Un recinto se llama *estelar* respecto a un punto dado si cualquier punto del recinto se puede unir con el punto dado mediante un segmento rectilíneo que pertenece íntegramente al recinto). Es evidente que $r_2\leqslant r_3\leqslant r_1$.

377. Halle r_1, r_2 y r_3 para la función $w=\frac{1}{1-z}$ y construya las imágenes de los círculos $|z|<r_1$, $|z|<r_2$ y $z<r_3$.

378. Halle r_1 para cada una de las funciones siguientes:
1) $w=z+z^2$, 2) $w=z+az^2$ (a es un número real);
3) $w=z/(1-z)^2$.

379. Demuestre que para la transformación $w=f(z)$ la curvatura de la imagen de la circunferencia $|z|=r$ se expresa mediante la fórmula $k=\frac{1+\operatorname{Re}[zf''(z)/f'(z)]}{|zf'(z)|}$.

380. Demuestre que una función analítica $f(z)$ transforma la circunferencia $|z|=r$ en una curva convexa si, y sólo si, $\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\frac{\pi}{2}+\varphi+\arg f'(z)\right]\equiv 1+\operatorname{Re}\left[\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right]\geqslant 0$ para todos los φ ($z=re^{i\varphi}$).

381. Demuestre que el círculo $|z|<r$ se transforma mediante una función analítica $f(z)$ ($f(0)=0$ en un recinto estelar respecto

al punto $w=0$ si, y sólo si, $\frac{\partial}{\partial\varphi}\arg f(z)=\mathrm{Re}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right]\geqslant 0$ para todos los $\varphi\left(z-re^{i\varphi}\right)$.

382. Demuestre que: 1) Si la funcion $w=f(z)$ ($f(0)=0$) transforma el circulo $|z|<1$ en un recinto estelar respecto al punto $w=0$, la función $w_1=\int_0^z \frac{f(t)}{t}\,dt$ transforma este mismo círculo en un recinto convexo.

2) Si $w=f(z)$ transforma el circulo $|z|<1$ en un recinto convexo, la función $w_1=zf'(z)$ realiza la transformación de este círculo en un recinto estelar respecto al punto $w=0$.

383. Halle r_s para cada una de las funciones siguientes:

1) $w=z+z^2$;

2) $w=z+az^2$ (a es un número real);

3) $w=z/(1-z)^2$.

384. Halle r_1 y r_s para la función $w=e^z-1$.

385. Halle r_s para cada una de las funciones siguientes:

1) $w=z+z^2$;

2) $w=z+az^2$ (a es un número real);

3) $w=z/(1-z)^2$.

Sugerencia. En la solución del problema 385, 3) conviene partir directamente de la desigualdad $\frac{\partial}{\partial\varphi}[\varphi+\arg f'(z)]\geqslant 0$.

CAPITULO III

INTEGRALES Y SERIES DE POTENCIAS

En los problemas de este capítulo, así como en los capítulos siguientes, siempre que no se diga lo contrario, el recorrido de contornos simples (es decir, que no se intersecan consigo mismos) cerrados se realiza en la dirección positiva.

§ 1. INTEGRACION DE FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA

386. *Mediante la sumación directa demuestre las siguientes igualdades:*

1) $\int\limits_{z_0}^{z_1} dz = z_1 - z_0$; 2) $\int\limits_{z_0}^{z_1} z\,dz = \frac{1}{2}(z_1^2 - z_0^2)$.

387. Sea C un contorno simple cerrado que limita el área S. Demuestre las siguientes igualdades:

1) $\int\limits_C x\,dz = iS$; 2) $\int\limits_C y\,dz = -S$; 3) $\int\limits_C \bar{z}\,dz = 2iS$.

388. Calcule las integrales $I_1 = \int x\,dz$ e $I_2 = \int y\,dz$ siguiendo los caminos siguientes:

1) a lo largo del radio vector del punto $z = 2 + i$;

2) a lo largo de la semicircunferencia $|z| = 1$, $0 \leqslant \arg z \leqslant \pi$ (el camino se inicia en el punto $z = 1$);

3) a lo largo de la circunferencia $|z - a| = R$.

389. Calcule la integral $\int |z|\,dz$ siguiendo los caminos siguientes:

1) a lo largo del radio vector del punto $z = 2 - i$;

2) a lo largo de la semicircunferencia $|z| = 1$, $0 \leqslant \arg z \leqslant \pi$ (el camino se inicia en el punto $z = 1$);

3) a lo largo de la semicircunferencia $|z|=1$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{2}$ (el camino se inicia en el punto $z=-i$);

4) a lo largo de la circunferencia $|z|=R$.

390. Calcule la integral $\int\limits_C |z|\,\bar{z}\,dz$, donde C es un contorno cerrado compuesto por la semicircunferencia superior $|z|=1$ y por el segmento $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $y=0$.

391. Calcule la integral $\int\limits_C \frac{z}{\bar{z}}\,dz$, donde C es la frontera del semianillo representado en la fig. 11.

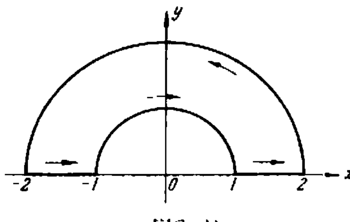


FIG. 11

392. Calcule la integral $\int (z-a)^n\,dz$ (n es un número entero):

1) a lo largo de la semicircunferencia $|z-a|=R$, $0 \leqslant \arg(z-a) \leqslant \pi$ (el camino se inicia en el punto $z=a+R$);

2) a lo largo de la circunferencia $|z-a|=R$;

3) a lo largo del perímetro del cuadrado de centro en el punto a y de lados paralelos a los ejes de coordenadas.

En los problemas **393—398** la rama de la función multiforme que figura como integrando se determina especificando su valor en un punto del contorno de integración. Si el contorno es cerrado, en calidad del punto inicial del camino de integración siempre se toma aquel punto en el que se da el valor del integrando (debe tenerse en cuenta que la magnitud de la integral puede depender de la selección de este punto inicial).

393. Calcule la integral $\int \frac{dz}{\sqrt{z}}$ a lo largo de los contornos siguientes:

1) a lo largo de la semicircunferencia $|z|=1$, $y \geqslant 0$, $\sqrt{1}=1$;

2) a lo largo de la semicircunferencia $|z|=1$, $y \geqslant 0$, $\sqrt{1}=-1$;

3) a lo largo de la semicircunferencia $|z|=1$, $y \leqslant 0$, $\sqrt{1}=1$;

4) a lo largo de la circunferencia $|z|=1$, $\sqrt{1}=1$;

5) a lo largo de la circunferencia $|z|=1$, $\sqrt{-1}=i$.

394. Calcule la integral $\int\limits_C \operatorname{Ln} z\,dz$, donde:

1) C es la circunferencia unidad y $\operatorname{Ln} 1=0$;

2) C es la circunferencia unidad y $\operatorname{Ln} i=\frac{\pi i}{2}$;

3) C es la circunferencia $|z|=R$ y $\operatorname{Ln} R=\ln R$;

4) C es la circunferencia $|z|=R$ y $\operatorname{Ln} R=\ln R+2\pi i$.

395. Calcule la integral $\int\limits_{|z|=1} z^n \operatorname{Ln} z\,dz$, donde n es un número entero y

1) $\operatorname{Ln} 1=0$; 2) $\operatorname{Ln}(-1)=\pi i$.

396. Calcule la integral $\int\limits_{|z|=1} z^{\alpha}\,dz$, donde α es un número complejo cualquiera y $1^{\alpha}=1$.

397. Demuestre que $\int\limits_{|z|=1} a^z\,dz=0$ como quiera que escoja el valor inicial de la función a^z.

398. ¿Para qué valores de $\alpha\,(0\leqslant\alpha<2\pi)$ existen las integrales:

$$1)\ I_1=\int e^{-\frac{1}{z}}\,dz;\qquad 2)\ I_p=\int e^{-\frac{1}{z^p}}\,dz$$

(p es un número natural) tomadas a lo largo del radio vector del punto $z=e^{i\alpha}$?

---

399. Demuestre que para $|a|\neq R$ se tiene

$$\int\limits_{|z|=R} \frac{dz}{|z-a|\,|z+a|}<\frac{2\pi R}{|R^2-|a|^2|}.$$

400. Demuestre las siguientes proposiciones:

1) Si $f(z)$ es continua en una vecindad del origen de coordenadas, se tiene

$$\lim_{r\to 0}\int\limits_0^{2\pi} f(re^{i\varphi})\,d\varphi=2\pi f(0).$$

2) Si $f(z)$ es continua en una vecindad del punto $z=a$, se tiene

$$\lim_{r\to 0}\int\limits_{|z-a|=r} \frac{f(z)\,dz}{z-a}=2\pi i f(a).$$

401. Demuestre las siguientes proposiciones:

1) Si $f(z)$ es continua en la semifranja $x\geqslant x_0$, $0\leqslant y\leqslant h$ y el límite $\lim\limits_{x\to\infty} f(x+iy)=A$ no depende de y y existe uniformemente

respecto a y, se tiene $\lim_{x \to \infty} \int_{\beta_x} f(z)\,dz = iAh$, donde β_x es el segmento $0 \leqslant y \leqslant h$ de la recta vertical recorrido desde abajo hacia arriba.

2) Si $f(z)$ es continua en el sector $0 < |z-a| \leqslant r_0$, $0 \leqslant \arg(z-a) \leqslant \alpha$ $(0 < \alpha \leqslant 2\pi)$ y existe el límite

$$\lim_{a_* \to a} (z-a) f(z) = A,$$

se tiene

$$\lim_{r \to 0} \int_{\gamma_r} f(z)\,dz = iA\alpha,$$

donde γ_r es el arco de la circunferencia $|z-a| < r$ perteneciente al sector dado y recorrido en la dirección positiva.

3) Si $f(z)$ es continua en el recinto $|z| \geqslant R_0$, $0 \leqslant \arg z \leqslant \alpha$ $(0 < \alpha \leqslant 2\pi)$ y existe el límite $\lim_{z \to \infty} zf(z) = A$, se tiene

$$\lim_{R \to \infty} \int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = iA\alpha,$$

donde Γ_R es el arco de la circunferencia $|z| = R$ perteneciente al recinto dado y recorrido en la dirección positiva respecto al origen de coordenadas.

402. Demuestre los teoremas siguientes:

1) Si $f(z)$ es continua en el recinto $|z| \leqslant R_0$, $\operatorname{Im} z \geqslant a$ (a es un número real fijo) y en este recinto $f(z) \to 0$ para $z \to \infty$, se tiene para cualquier número positivo m

$$\lim_{R \to \infty} \int_{\Gamma_R} e^{imz} f(z)\,dz = 0,$$

donde Γ_R es el arco de la circunferencia $|z| = R$, perteneciente al recinto dado (lema de *Jordan*).

Sugerencia. Al estimar el módulo de la integral a lo largo de la semicircunferencia $|z| = R$, $\operatorname{Im} z > 0$ recurra a la desigualdad $\operatorname{sen}\theta \geqslant 2\theta/\pi$ válida para $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$, y al realizar las estimaciones a lo largo de los arcos pertenecientes al semiplano inferior (en el caso en que $a < 0$) recurra a que la longitud de cada uno de ellos tiende hacia $|a|$ para $R \to \infty$.

2) Si $f(z)$ es continua en el semiplano $\operatorname{Re} z \geqslant \sigma$ (σ es un número real fijo) y en este semiplano $f(z) \to 0$ para $z \to \infty$, se tiene para cualquier número negativo t

$$\lim_{R \to \infty} \int_{\Gamma_R} e^{zt} f(z)\,dz = 0,$$

donde Γ_R es el arco de la circunferencia $|z| = R$, $\operatorname{Re} z \geqslant \sigma$. Si $f(z)$ es continua en el semiplano $\operatorname{Re} z \leqslant \sigma$, la proposición es válida si t es positivo y si Γ_R es el arco de la circunferencia $|z| = R$, $\operatorname{Re} z \leqslant \sigma$.

Observación. La demostración de ambos teoremas se puede ver, por ejemplo, en [2, capítulo V, § 2, nº 73].

§ 2. TEOREMA INTEGRAL DE CAUCHY [1]

403. Demuestre que, si el camino no pasa por el origen de coordenadas, se tiene

$$\int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta} = \ln r + i\varphi + 2\pi i k,$$

donde k es un número entero que indica cuántas veces el circuito de integración rodea el origen de coordenadas ($z = re^{i\varphi}$).

404. Demuestre que, si el camino no pasa por los puntos $\pm i$, se tiene

$$\int_0^1 \frac{d\zeta}{1+\zeta^2} = \frac{\pi}{4} + k\pi,$$

donde k es un número entero.

405. Demuestre que, si C es un contorno simple cerrado arbitrario que no pasa por el punto a y n es un número entero, se tiene

$$\int_C (z-a)^n dz = \begin{cases} 0, \text{ si } n \neq -1, \\ 2\pi i, \text{ si } n = -1 \text{ y } a \text{ se encuentra dentro de } C, \\ 0, \text{ si } n = -1 \text{ y } a \text{ se encuentra fuera de } C. \end{cases}$$

406. El teorema integral de Cauchy puede ser generalizado en la forma siguiente: si $f(z)$ es continua en un recinto cerrado $\bar{G}$ acotado por un contorno simple rectificable C y es analítica en el interior de G, entonces $\int_C f(z)\,dz = 0$. Demuestre esto en el caso de un contorno estelar [2].

Sugerencia. Aceptando que C es estelar respecto al origen de coordenadas, considere los contornos $C_\lambda: \zeta = \lambda z$ $(0 < \lambda < 1,\ z \in C)$ y realice el paso al límite para $\lambda \to 1$ (véase, por ejemplo, [1, cap. III, § 2, nº 3] o [2, cap. I, § 4, nº 12]).

407. Demuestre las proposiciones siguientes:

1) Si $f(z)$ es analítica en la franja $0 \leqslant y \leqslant h$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x+iy) = 0$ y la integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ existe, entonces la integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x+ih)\,dx$ también existe y ambas integrales coinciden.

2) Si $f(z)$ es analítica en el ángulo $0 \leqslant \arg z \leqslant \alpha$ $(0 < \alpha \leqslant 2\pi)$, $\lim\limits_{z \to \infty} zf(z) = 0$ y la integral $\int_0^{\infty} f(x)\,dx$ existe, entonces la integral

---

[1] Los problemas de cálculo de integrales, propuestos en este y el siguiente parágrafo, tienen en general, carácter ilustrativo. La mayoría de problemas de este tipo aparece en el § 4 del capítulo IV dedicado a la aplicación de la teoría de residuos.

[2] Un contorno se denomina estelar respecto a un punto, si todo rayo que parte de este punto interseca el contorno en un punto.

$\int f(z)\,dz$ tomada a lo largo del rayo $z=re^{i\gamma}$, $0\leqslant r<\infty$, también existe y ambas integrales coinciden.

Sugerencia. Emplee los resultados del problema **401**.

408. Demuestre que $\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2}\cos 2bx\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-b^2}$.

Sugerencia. Integre la función $f(z)=e^{-z^2}$ a lo largo de la frontera del rectángulo $|x|\leqslant R$, $0\leqslant y\leqslant b$ y emplee la integral de Poisson $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}$.

409. Demuestre las igualdades $\int\limits_0^{\infty}\cos x^2\,dx=\int\limits_0^{\infty}\operatorname{sen} x^2\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$ (integrales de Fresnel).

Sugerencia. Integre la función $f(z)=e^{iz^2}$ a lo largo de la frontera de sector $0\leqslant|z|\leqslant R$, $0\leqslant\arg z\leqslant\frac{\pi}{4}$ y emplee el resultado del problema **402**, 1) (tomando $z^2=\zeta$).

410. Demuestre que $\int\limits_0^{\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$ (integral de Dirichlet).

Sugerencia. Integre la función $f(z)=\frac{e^{iz}}{z}$ a lo largo de la frontera del recinto $r\leqslant|z|\leqslant R$, $0\leqslant\arg z\leqslant\pi$ y emplee los resultados de los problemas **401** y **402**.

411. Demuestre que para $0<s<1$ son válidas las igualdades:

1) $\int\limits_0^{\infty} x^{s-1}\cos x\,dx=\Gamma(s)\cos\frac{\pi s}{2}$, 2) $\int\limits_0^{\infty} x^{s-1}\operatorname{sen} x\,dx=\Gamma(s)\operatorname{sen}\frac{\pi s}{2}$.

Sugerencia. Integre la función $f(z)=z^{s-1}e^{-iz}$ a lo largo de la frontera del recinto $r\leqslant|z|\leqslant R$, $-\frac{\pi}{2}\leqslant\arg z\leqslant 0$ y emplee los resultados de los problemas **401**, 2) y **402**, 1) y la representación integral para la función Gamma:

$$\Gamma(t)=\int\limits_0^{\infty} x^{t-1}e^{-x}\,dx.$$

§ 3. FORMULA INTEGRAL DE CAUCHY

En todos los problemas de este parágrafo C es un contorno cerrado simple rectificable.

412. Calcule la integral $\int\limits_C\frac{dz}{z^2+9}$, si:

1) el punto $3i$ se encuentra dentro del contorno C y el punto $-3i$ fuera de él;

2) el punto $-3i$ se encuentra dentro del contorno C y el punto $3i$ fuera de él;

3) los puntos $\pm 3i$ se encuentran dentro del contorno C.

413. Calcule todos los valores posibles de la integral $\int\limits_C \frac{dz}{z(z^2-1)}$ para diferentes posiciones del contorno C. Se supone que el contorno C no pasa por ninguno de los puntos 0, 1, y -1.

414. ¿Qué cantidad de diferentes valores puede tener la integral $\int\limits_C \frac{dz}{\omega_n(z)}$, donde $\omega_n(z) = (z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n)$ $(z_i \neq z_j)$ y el contorno C no pasa por ninguno de los puntos z_i?

415. Calcule la integral $\int\limits_{|z-a|=a} \frac{z\,dz}{z^4-1}$, $a > 1$.

416. Calcule la integral $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{e^z\,dz}{z^2+a^2}$, donde el contorno C contiene en su interior el círculo $|z| \leqslant a$.

417. Calcule la integral $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{ze^z\,dz}{(z-a)^3}$, si el punto a se encuentra dentro del contorno C.

Sugerencia. Recurra a las fórmulas para las derivadas de la integral de Cauchy.

418. Calcule la integral $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{e^z dz}{z(1-z)^3}$, si:

1) el punto 0 se encuentra dentro y el punto 1 fuera del contorno C;

2) el punto 1 se encuentra dentro y el punto 0 fuera del contorno C;

3) los puntos 0 y 1 se encuentran ambos dentro del contorno C.

419. La función $f(z)$ es analítica en un recinto que contiene en su interior el origen de coordenadas y está acotado por un contorno simple cerrado C. Demuestre que como quiera que se escoja la rama de $\operatorname{Ln} z$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C f'(z)\operatorname{Ln} z\,dz = f(z_0) - f(0),$$

donde z_0 es el punto de integración.

Sugerencia. Integre por partes.

420. Calcule la integral $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C z^n \operatorname{Ln}\frac{z+1}{z-1}dz$, si $\operatorname{Ln} a = \ln a$ para $a > 0$ y el contorno C es:

1) la circunferencia $|z| = 2$;

2) la circunferencia $|z-1| = 1$ y el punto inicial de integración es $z = 1+i$.

421. De acuerdo con el teorema de Liouville, la función $f(z)$ analítica y acotada en todo el plano es una constante. Demuestre este teorema calculando la integral $\int\limits_{|z|=R} \frac{f(z)\,dz}{(z-a)(z-b)}$ $(|a|<R, |b|<R)$ y estimándola para $R \to \infty$.

422. Sea $f(z)$ analítica en un recinto cerrado acotado por un contorno C; sean $z_1, z_2, \ldots, z_n$ diferentes puntos arbitrarios del interior de C y sea $\omega_n(z)=(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n)$. Demuestre que la integral

$$P(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(\zeta)}{\omega_n(\zeta)}\frac{\omega_n(\zeta)-\omega_n(z)}{\zeta-z}\,d\zeta$$

es un polinomio de grado $(n-1)$ que coincide con $f(z)$ en los puntos $z_1, z_2, \ldots, z_n$ (el polinomio $P(z)$ se denomina polinomio interpolador de Lagrange).

423. Demuestre el siguiente teorema (fórmula de Cauchy para un recinto infinito).

Sea C un contorno cerrado simple que acota un recinto finito D. Sea $f(z)$ una función analítica en el exterior del recinto D y sea $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=A$. En estas condiciones

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=\begin{cases}-f(z)+A, & \text{si el punto } z \text{ pertenece al exterior del recinto } D,\\ A, & \text{si el punto } z \text{ pertenece al recinto } D.\end{cases}$$

El contorno C se recorre en el sentido positivo respecto al recinto D.

Sugerencia. Considere primero el caso $A=0$.

424. Supongamos que la función $f(z)$ y el contorno C verifican las condiciones del problema anterior.

Demuestre que, si el origen de coordenadas pertenece al recinto D, se tiene

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(\zeta)}{\zeta z-\zeta^2}\,d\zeta=\begin{cases}0, & \text{si } z\in D,\\ f(z)/z, & \text{si } z\overline{\in} D.\end{cases}$$

§ 4. SERIES DE POTENCIAS

DETERMINACIÓN DEL RADIO DE CONVERGENCIA

En los problemas **425—436** determine los radios de convergencia de las series.

425. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$. **426.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$. **427.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n z^n$. **428.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}z^n$.

429. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$. **430.** $\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$. **431.** $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{n!}$. **432.** $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$.

433. $\sum_{n=0}^{\infty} [3+(-1)^n]^n z^n$. **434.** $\sum_{n=0}^{\infty} \cos in \cdot z^n$. **435.** $\sum_{n=0}^{\infty} (n+a^n) z^n$.

436. $1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{n!\,\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)} z^n$.

437. El radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ es igual a $R\,(0 < R < \infty)$. Determine los radios de convergencia de las series:

1) $\sum_{n=0}^{\infty} n^k c_n z^n$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty} (2^n-1) c_n z^n$; 3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n}{n!} z^n$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n c_n z^n$; 5) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n^k z^n$; 6) $\sum_{n=0}^{\infty} (1+z_0^n) c_n z^n$.

438. Los radios de convergencia de las series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ son iguales a r_1 y r_2 respectivamente. ¿Qué se puede decir respecto a los radios de convergencia de las series:

1) $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) z^n$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$; 3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{b_n} z^n$?

439. Sume para $|z| < 1$ las siguientes series:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} n z^n$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$; 3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}$.

COMPORTAMIENTO EN LA FRONTERA DEL CIRCULO DE CONVERGENCIA.

Investigue en los problemas **440—446** el comportamiento de la serie de potencias en la frontera del círculo de convergencia.

440. $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$. **441.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$. **442.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$.

443. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^n$. **444.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{pn}}{n}$ (p es un número natural).

445. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n} z^{2n-1}$. **446.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n!}}{n^2}$.

De acuerdo con el segundo teorema de Abel, si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ converge, se tiene

$$\lim_{r\to 1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \quad (0 < r < 1).$$

447. Demuestre que el teorema inverso al segundo teorema de Abel no es justo, es decir, dé un ejemplo de una serie divergente $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ para la cual existe el límite $\lim_{r\to 1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n$.

448. Empleando el segundo teorema de Abel y los resultados del problema **439**, demuestre las igualdades siguientes:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n} = -\ln\left|2\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}\right| \quad (0 < |\varphi| \leqslant \pi);$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n\varphi}{n} = \frac{\pi-\varphi}{2} \quad (0 < \varphi < 2\pi);$

3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\varphi}{2n+1} = \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{cgt}\frac{\varphi}{2}\right| \quad (0 < |\varphi| < \pi);$

4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2n+1)\varphi}{2n+1} = \frac{\pi}{4} \quad (0 < \varphi < \pi);$

5) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{\cos n\varphi}{n} = \ln\left(2\cos\frac{\varphi}{2}\right) \quad (-\pi < \varphi < \pi);$

6) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{\operatorname{sen} n\varphi}{n} = \frac{\varphi}{2} \quad (-\pi < \varphi < \pi).$

449*. Demuestre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{[\sqrt{n}]} z^n$ converge no absolutamente en todos los puntos de la frontera del círculo de convergencia.

Sugerencia. Si $z=1$, divida la serie en grupos de sumandos del mismo signo y demuestre que estos grupos satisfacen las condiciones del criterio de Leibniz para series alternadas. Si $|z|=1$ y $|z| \neq 1$, recurra al teorema del problema 90 tomando $a_n = (-1)^{[\sqrt{n}]} z^n$, $b_n = 1/n$.

450. Demuestre que, si la sucesión $\{a_n\}$ de números reales positivos tiende monótonamente hacia cero y el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es igual a 1, entonces esta serie converge en todo punto de la circunferencia $|z|=1$, salvo, posiblemente, el punto $z=1$.

Sugerencia. Recurra al criterio de convergencia de Dirichlet (véase el problema 88).

451. Demuestre que, si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ converge en el punto $\xi = Re^{i\theta}$ de la circunferencia del círculo de convergencia, converge uniformemente *en todo recinto* cerrado G, que pertenece al *círculo* de convergencia, se encuentra en un ángulo entre dos cualesquiera cuerdas de la circunferencia $|z| = R$ que parten del punto ζ y no contiene ningún punto de la circunferencia $|z| = R$, salvo el punto ζ.

Observación. Esta afirmación es una forma más general del segundo teorema de Abel (véase, por ejemplo, [1, cap. III, § 7, nº 3]).

§ 5. SERIE DE TAYLOR

DESARROLLO DE FUNCIONES EN SERIES DE TAYLOR

En los problemas 452—466 desarrolle las funciones dadas en una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ y halle el radio de convergencia.

452. $\operatorname{ch} z$. 453. $\operatorname{sh} z$. 454. $\operatorname{sen}^2 z$. 455. $\operatorname{ch}^2 z$.

456. $(a+z)^\alpha$ $(a^\alpha = e^{\alpha \ln a})$. 457. $\sqrt{z+i}$ $\left(\sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)$.

458. $\frac{1}{az+b}$ $(b \neq 0)$. 459. $\frac{z}{z^2-4z+13}$. 460. $\frac{z^2}{(z+1)^2}$.

461. $\ln \frac{1+z}{1-z}$. 462. $\operatorname{Arctg} z$ $(\operatorname{Arctg} 0 = 0)$.

463. $\operatorname{Arsh} z$ $(\operatorname{Arsh} 0 = 0)$. 464. $\ln (z^2 - 3z + 2)$.

465. $\int_0^z e^{z^2} dz$. 466. $\int_0^z \frac{\operatorname{sen} z}{z} dz$.

En los problemas 467—472 desarrolle las funciones dadas en una serie de potencias de $(z-1)$ y halle el radio de convergencia.

467. $\frac{z}{z+2}$. 468. $\frac{z}{z^2-2z+5}$. 469. $\frac{z^2}{(z+1)^2}$.

470. $\sqrt[3]{z}$ $\left(\sqrt[3]{1} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)$. 471. $\ln z$. 472. $\operatorname{sen}(2z - z^2)$.

En los problemas 473—477 halle los cinco primeros términos del desarrollo de las funciones dadas en serie de potencias de z.

473. $e^{z \operatorname{sen} z}$. 474. $\sqrt{\cos z}$ $(\sqrt{\cos z} = 1$ para $z = 0)$.

475. $(1+z)^z = e^{z \ln (1+z)}$. 476. e^{e^z}. 477. $e^z \ln (1+z)$.

478. 1) Desarrolle en una serie de potencias de z la función $\ln (1+e^z)$ (halle la relación recurrente entre los coeficientes de la serie).

Sugerencia. Halle previamente el desarrollo para la derivada de la función dada.

2) Demuestre que el único término del desarrollo que contiene una potencia impar de z será $z/2$.

Sugerencia. Recuerra a la identidad $\ln (1+e^z) - \ln (1+e^{-z}) = z$.

En los problemas **479—483** desarrolle en serie de potencias de z las funciones dadas, empleando para ello la multiplicación de series y la sustitución de una serie en una serie.

479. $[\ln(1-z)]^2$. **480.** $[\mathrm{Ln}(1-z)]^2$ $(\mathrm{Ln}\,1=2\pi i)$.

481. $(\mathrm{Arctg})^2\,(\mathrm{Arctg}\,0=0)$.

482. $\mathrm{Arctg}\,z\ln(1+z^2)$ $(\mathrm{Arctg}\,0=0)$. **483.** $e^{\frac{z}{1-z}}$.

484. Demuestre que, si el desarrollo de la función $1/\cos z$ es representado en la forma $\frac{1}{\cos z}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{E_{2n}}{(2n)!}z^{2n}$, los números E_{2n} (números de Euler) satisfacen las relaciones

$$E_0=1,\quad E_0+\binom{2n}{2}E_2+\ldots+\binom{2n}{2n}E_{2n}=0.$$

485. Demuestre que, si el desarrollo de la función $z/(e^z-1)$ en serie de potencias de z es representado en la forma $\frac{z}{e^z-1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}z^n$, los números B_n (números de Bernoulli) verifican las relaciones

$$B_0=1,\quad \binom{n+1}{0}B_0+\binom{n+1}{1}B_1+\ldots+\binom{n+1}{n}B_n=0.$$

486. Demuestre que todos los números de Bernoulli de índice impar, salvo B_1, son iguales a cero.

Sugerencia. Recurra a la identidad $\frac{z}{e^z-1}-\frac{(-z)}{e^{-z}-1}=-z$.

487. Desarrolle en serie de potencias de z la función $z\,\mathrm{ctg}\,z$ y halle el radio de convergencia de la serie obtenida.

Sugerencia. Recurra a la igualdad $z\,\mathrm{ctg}\,z=iz+2iz/(e^{2iz}-1)$ que se deduce de las fórmulas de Euler.

488. Desarrolle las funciones dadas en serie de potencias de z y halle los radios de convergencia de las series obtenidas:

1) $\ln\frac{\mathrm{sen}\,z}{z}$; 2) $\mathrm{tg}\,z$; 3) $\ln\cos z$; 4) $\frac{z}{\mathrm{sen}\,z}$.

489. Demuestre que los coeficientes c_n del desarrollo

$$\frac{1}{1-z-z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$$

verifican la relación $c_n=c_{n-1}+c_{n-2}$ $(n\geqslant 2)$. Halle c_n y el radio de convergencia de la serie.

Observación. Los números c_n se llaman *números de Fibonacci.*

490. En el desarrollo $\frac{A+Bz+Cz^2}{\alpha+\beta z+\gamma z^2+\delta z^3}=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ $(\alpha \neq 0)$ halle c_0, c_1 y c_2, así como la relación recurrente entre c_n, c_{n-1}, c_{n-2} y c_{n-3} $(n \geqslant 3)$.

FUNCIONES GENERADORAS DE SISTEMAS DE POLINOMIOS

Si en un círculo $|t| < R$ tiene lugar el desarrollo

$$F(t, z)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)\, t^n,$$

la función $F(t, z)$ se llama *función generadora* para la sucesión $\{f_n(z)\}$. Con frecuencia, algunas propiedades de la sucesión de funciones $\{f_n(z)\}$ se pueden demostrar basándose en las propiedades de su función generadora.

491. Los polinomios de Bernoulli $\varphi_n(z)$ se definen mediante el desarrollo

$$t\,\frac{e^{tz}-1}{e^t-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(z)}{n!}\,t^n.$$

Demuestre que poseen las siguientes propiedades:

1) $\varphi_n(z+1)-\varphi_n(z)=nz^{n-1}$;

2) si m es un número natural, se tiene

$$\frac{\varphi_{n+1}(m)}{n+1}=1+2^n+3^n+\ldots+(m-1)^n;$$

3) $\varphi_n(z)=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k} B_k z^{n-k}$, donde B_k son los números de Bernoulli (véase el problema 485).

492. La función $\frac{1}{\sqrt{1-2tz+t^2}}$ es generadora para los polinomios de Legendre $P_n(z)$

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tz+t^2}}=\sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)\, t^n.$$

Demuestre las relaciones:

1) $(n+1)P_{n+1}(z)-(2n+1)zP_n(z)+nP_{n-1}(z)=0$;

2) $P_n(z)=P'_{n+1}(z)-2zP'_n(z)+P'_{n-1}(z)$;

3) $(2n+1)P_n(z)=P'_{n+1}(z)-P'_{n-1}(z)$.

Sugerencia. Derive la función generadora respecto a t y a z respectivamente.

493. Empleando la fórmula integral para los coeficientes de la serie de Taylor, desmuestre que, siendo $-1 < s < 1$, se tiene

$$P_n(s)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\zeta^n\, d\zeta}{\sqrt{1-2s\zeta+\zeta^2}},$$

donde C es la circunferencia de radio $R > 1$ y de centro en el punto $\zeta = 0$.

494. Demuestre que la función $\frac{4-t^2}{4-4tz+t^2}$ es generadora para los polinomios de Chébyshev

$$T_n(z) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos z).$$

Empleando las fórmulas integrales para los coeficientes de la serie de Taylor, pruebe que $4T_{n+1}(z) - 4zT_n(z) + T_{n-1}(z) = 0$ para $n \geqslant 2$.

495. Los polinomios de Hermite—Chébyshev $H_n(z)$ se definen mediante el desarrollo

$$e^{2tz-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(z)}{n!} t^n.$$

Demuestre las siguientes relaciones:

1) $H_{n+1}(z) - 2zH_n(z) + 2nH_{n-1}(z) = 0 \quad (n \geqslant 1)$;

2) $H'_n(z) = 2nH_{n-1}(z) \quad (n \geqslant 1)$;

3) $H''_n(z) - 2zH'_n(z) + 2nH_n(z) = 0 \quad (n \geqslant 0)$;

4) $H_n(z) = (-1)^n e^{z^2} \frac{d^n (e^{-z^2})}{dz^n}$.

496. Los polinomios de Chébyshev—Laguerre se pueden definir mediante la igualdad

$$L_n(z) = e^z \frac{d^n (z^n e^{-z})}{dz^n}.$$

Halle la función generadora para la sucesión $\{L_n(z)\}$ y obtenga mediante ella la fórmula recurrente que realaciona

$$L_{n-1}(z), \; L_n(z) \; \text{y} \; L_{n+1}(z).$$

Observación. En los problemas 492—496 se han considerado sólo algunas propiedades particulares de los sistemas de polinomios indicados. Acerca de otras propiedades importantes de los mismos, que desempeñan un papel considerable en la solución de diferentes problemas de la física matemática, véase, por ejemplo, [2, cap. VII, § 2] o R. Courant und D. Hilbert, Methoden der Mathematischen Physik, vol. I, cap. II y VII, Springer, Berlin, 1937.

SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES

En los problemas **497—499** halle las resoluciones de las ecuaciones diferenciales dadas que verifican las condiciones $w(0) = 0$ y $w'(0) = 1$.

497. $w'' - z^2 w = 3z^2 - z^4$.

498. $(1 - z^2) w'' - 2zw' + n(n+1) w = 0$.

499. $(1 - z^2) w'' - 4zw' - 2w = 0$.

500. Desarrolle en serie de tipo $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ la función $\cos(m \arcsen z)$ ($\arcsen 0 = 0$), buscando la ecuación diferencial para la cual esta función es una de las soluciones.

501. La ecuación diferencial

$$z(1-z)\frac{d^2w}{dz^2} + [c-(a+b+1)z]\frac{dw}{dz} - abw = 0$$

se llama *hipergeométrica.*

Halle la solución $w(z)$ de la ecuación hipergeométrica que es analítica en el punto $z=0$ y verifique la condición $w(0)=1$, suponiendo que c no es igual ni a cero ni a un número entero negativo.

502. Demuestre que la solución general de la ecuación hipergeométrica es de la forma (c no es igual a un número entero)

$$w = C_1 F(a, b, c, z) + C_2 z^{1-c} F(a+1-c, b+1-c, 2-c, z),$$

donde $F(a, b, c, z)$ es la función definida en el problema anterior (la serie hipergeométrica).

503*. Demuestre que, si c no es igual ni a cero ni a un número entero negativo, se tiene

$$\frac{dF(a, b, c, z)}{dz} = \frac{ab}{c} F(a+1, b+1, c+1, z).$$

§ 6. ALGUNAS APLICACIONES DE LA FORMULA INTEGRAL DE CAUCHY Y DE SERIES DE POTENCIAS

CEROS DE FUNCIONES ANALITICAS

504. Demuestre que el punto z_0 es un cero de orden k para la función analítica $f(z)$ si, y sólo si, en una vecindad del punto z_0 tiene lugar la igualdad $f(z) = (z-z_0)^k \varphi(z)$, donde la función $\varphi(z)$ es analítica en el punto z_0 y $\varphi(z_0) \neq 0$.

505. Halle el orden del cero $z=0$ para las funciones:
1) $z^2(e^{z^2}-1)$; 2) $6 \operatorname{sen} z^3 + z^3(z^6-6)$; 3) $e^{\operatorname{sen} z} - e^{\operatorname{tg} z}$.

506. El punto z_0 es un cero de orden k para la función $f(z)$ y un cero de orden l para la función $\varphi(z)$. ¿Qué es el punto z_0 para las funciones siguientes:

1) $f(z)\varphi(z)$; 2) $f(z)+\varphi(z)$; 3) $\dfrac{f(z)}{\varphi(z)}$?

En los problemas **507—521** halle el orden de todos los ceros de las funciones dadas.

507. z^2+9. **508.** $\dfrac{z^2+9}{z^4}$. **509.** $z \operatorname{sen} z$.

510. $(1-e^z)(z^2-4)^3$. **511.** $1-\cos z$.

512. $\frac{(z^2-\pi^2)^2 \operatorname{sen} z}{z^7}$. **513.** $\frac{1-\operatorname{ctg} z}{z}$. **514.** $e^{\operatorname{tg} z}$.

515. $\operatorname{sen}^3 z^2$. **516.** $\frac{\operatorname{sen}^2 z}{z}$. **517.** $\operatorname{sen} z^3$. **518.** $\cos^3 z$.

519. $\cos z^3$. **520.** $(\sqrt{z}-2)^3$. **521.** $(1-\sqrt{2-2\cos z})^2$.

TEOREMA DE UNICIDAD

522. ¿Puede existir un punto de acumulación para una sucesión de ceros (o, en general, de A-puntos) de una función que es diferente de una constante idéntica y que es analítica en toda la parte finita del plano?

523. ¿Existe una función analítica en el punto $z=0$ que en los puntos $z=\frac{1}{n}$ $(n=1, 2, \ldots)$ toma los valores:

1) $0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots, 0, 1, \ldots$;

2) $0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{6}, \ldots, 0, \frac{1}{2k}, \ldots$;

3) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \ldots, \frac{1}{2k}, \frac{1}{2k}, \ldots$;

4) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$?

524. ¿Existe una función analítica en el punto $z=0$ que verifica las condiciones (n es un número natural):

1) $f\left(\frac{1}{n}\right)=f\left(-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^2}$;

2) $f\left(\frac{1}{n}\right)=f\left(-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^3}$?

525. La función $\operatorname{sen}\frac{1}{1-z}$ posee una sucesión de ceros convergente hacia el punto $z=1$ y, sin embargo, esta función es distinta de una constante. ¿No está esto en contradicción en el teorema de unicidad?

EXPRESIÓN DE UNA FUNCIÓN ANALÍTICA EN TÉRMINOS DE SU PARTE REAL O IMAGINARIA

526*. La función $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ es analítica en el punto $z_0=x_0+iy_0$ y $f(z_0)=c_0$. Demuestre que

$$f(z)=2u\left(\frac{z+\bar{z}_0}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right)-\bar{c}_0.$$

527. Demuestre que en las condiciones del problema anterior

$$f(z)=2iv\left(\frac{z+\bar{z}_0}{2}, \frac{z-\bar{z}_0}{2i}\right)+\bar{c}_0.$$

En los problemas **528—531** halle la función analítica $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ a partir de su parte real o su parte imaginaria dadas.

528. $u(x, y) = x^2 - y^2 + 2$.

529. $u(x, y) = e^x (x \cos y - y \operatorname{sen} y) - \frac{y}{x^2 + y^2}$.

530. $v(x, y) = x + y - 3$. 531. $v(x, y) = \cos x \operatorname{sh} y - \operatorname{sh} x \operatorname{sen} y$.

DESIGUALDADES DE CAUCHY

532. Sea

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

el desarrollo de la función $f(z)$ en el círculo $|z| < R$.

1) Demuestre que $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^2 \, d\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n}$ $(r < R)$.

2) Demuestre que, siendo $\max\limits_{|z|=r} f(z) = M(r)$, los coeficientes c_n verifican las desigualdades (desigualdades de Cauchy)

$$|c_n| \leqslant \frac{M(r)}{r^n} \quad (r < R).$$

3) Demuestre que, si al menos una de las desigualdades de Cauchy se convierte en una igualdad, es decir, $|c_k| = M(r)/r^k$, entonces la función $f(z)$ es de la forma $f(z) = c_k z^k$.

Sugerencia. Emplee la desigualdad

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} \leqslant [M(r)]^2$$

que se deduce del punto 1).

533. Empleando las desigualdades de Cauchy demuestre el teorema de Liouville: si la función $f(z)$ es analítica en todo el plano y acotada, esta función es una constante.

Observación. Otro método de demostración del teorema de Liouville se da en el problema 421.

534. Demuestre que la distancia del cero de la función $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ más próximo al punto $z = 0$ es no menor de $\frac{\rho |c_0|}{M + |c_0|}$, donde ρ es un número cualquiera que no sobrepasa el radio de convergencia de la serie y $M = M(\rho) = \max\limits_{|z|=\rho} f(z)$.

Sugerencia. Pruebe que la función $f(z)$ no tiene ceros en el recinto en el que $|f(z) - c_0| < |c_0|$ y *estime* $|f(z) - c_0|$ *empleando las desigualdades de Cauchy*.

535. La función $f(z)\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ es analítica para $|z| \leqslant r$. Demuestre que la serie $\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n z^n}{n!}$ converge en todo el plano y que para su suma son válidas las estimaciones $|\varphi(z)| < Me^{\frac{|z|}{r}}$ y $|\varphi^{(k)}(z)| < \frac{M}{r^k} e^{\frac{|z|}{r}}$ (M es una constante).

TEOREMA DE AREAS PARA FUNCIONES UNIVALENTES

536. Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ una función analítica en el círculo $|z| \leqslant 1$ que transforma este círculo univalentemente en un recinto G de área S. Demuestre que $S = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n |c_n|^2$.

Sugerencia. Escriba la fórmula para el cálculo del área S en coordenadas polares.

Observación. Si se omite la condición de univalencia, cada parte aislada del recinto G debe contarse tantas veces cuantas veces la función $f(z)$ toma en el círculo $|z| \leqslant 1$ los valores correspondientes.

537. Demuestre que, si en las condiciones del problema anterior la función $f(z)$ es analítica *sólo* en el círculo abierto $|z| < 1$ y si existe además el límite finito $\lim_{r \to 1} S_r = S$, donde S_r es el área de la imagen del círculo $|z| \leqslant r < 1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n |c_n|^2$ converge y su suma es igual a S/π. Demuestre también que, si $\lim_{r \to 1} S_r = \infty$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n |c_n|^2$ diverge.

538. 1) Empleando la solución del problema 536, demuestre que, si $f'(0) = 1$ y la función $f(z)$ transforma conforme y biunívocamente el círculo $|z| \leqslant 1$ en un recinto G, entonces el área del recinto G es no menor que el área del círculo que se transforma (propiedad extremal de una transformación en un círculo).

2) Demuestre que entre todas las funciones $f(z)$ analíticas en el círculo $|z| \leqslant R$ que verifican la condición $\int_0^{2\pi} |f(Re^{i\varphi})|^2 d\varphi = M$, es la función lineal la que realiza la transformación del círculo en el recinto de menor área. Halle este área, si $f(0) = 0$.

En los problemas **539—542** recurra al principio de módulo máximo.

539. Demuestre que, si la función $f(z)$, diferente de una constante, es analítica en un recinto G y no se anula, el mínimo de la función $|f(z)|$ no puede alcanzarse en el interior del recinto G.

540. 1) Demuestre que en el interior de un recinto, acotado por una línea cerrada simple equipotencial del módulo de la función $f(z)$ (es decir, por una línea en todos los puntos de la cual $|f(z)|=\text{const}$) y contenido de su frontera en el recinto de analiticidad de la función $f(z)$, existe por lo menos un cero de esta función ($f(z)\not\equiv C$).

2) Demuestre que, si $P(z)$ es un polinomio de grado n, las líneas equipotenciales de su módulo $|P(z)|=C$ (lemniscatas) pueden descomponerse en no más de n componentes conexas.

541. Demuestre el lema de Schwarz: si la función $f(z)$ es analítica en el círculo $|z|<1$ y, ademas, $f(0)=0$ y $|f(z)|\leqslant 1$, se tiene $|f(z)|\leqslant|z|$ en todo el círculo.

Demuestre también que, si al menos en un punto interior del círculo $|f(z)|=|z|$, se tiene $f(z)=e^{i\alpha}z$ (α es un número real).

Sugerencia. Considere la función $f(z)/z$ y aplique a ella el principio de módulo máximo.

542. Demuestre que, si en el problema anterior la condición $f(0)=0$ es sustituida por la condición $f(\alpha)=0$ ($|\alpha|<1$), es válida la desigualdad $f(z)\leqslant\left|\dfrac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}\right|$ para $|z|\leqslant 1$.

Sugerencia. Considere la función $\dfrac{1-\alpha\bar{z}}{z-\alpha}f(z)$.

CAPITULO IV

SERIE DE LAURENT. PUNTOS SINGULARES DE FUNCIONES ANALITICAS UNIFORMES. RESIDUOS Y SUS APLICACIONES

§ 1. SERIE DE LAURENT

En los problemas **543—560** desarrolle la función dada en serie de Laurent o bien en el anillo indicado o bien en una vecindad del punto señalado. En el último caso determine el recinto para el cual es válido el desarrollo.

543. $\frac{1}{z-2}$ en vecindades de los puntos $z=0$ y $z=\infty$.

544. $\frac{1}{(z-a)^k}$ ($a\neq 0$, k es un número natural) en vecindades de los puntos $z=0$ y $z=\infty$.

545. $\frac{1}{z(1-z)}$ en vecindades de los puntos $z=0$, $z=1$ y $z=\infty$.

546. $\frac{1}{(z-a)(z-b)}$ $(0<|a|<|b|)$ en vecindades de los puntos $z=0$, $z=a$ y $z=\infty$ y en el anillo $|a|<|z|<|b|$.

547. $\frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$ en una vecindad del punto $z=2$ y en anillo $1<|z|<2$.

548. $\frac{1}{(z^2+1)^2}$ en vecindades de los puntos $z=i$ y $z=\infty$.

549. $\sqrt{(z-a)(z-b)}$ $(|b|\geqslant|a|)$ en una vecindad del punto $z=\infty$ (considere ambas ramas de la función).

550. $f(z)=\sqrt{\frac{z}{(z-1)(z-2)}}\left(\operatorname{Im} f\left(\frac{3}{2}\right)>0\right)$ en el anillo $1<|z|<2$.

551. $z^2e^{1/z}$ en vecindades de los puntos $z=0$ y $z=\infty$.

552. $e^{\frac{1}{1-z}}$ en vecindades de los puntos $z=1$ y $z=\infty$.

553. $\cos\frac{z^2-4z}{(z-2)^2}$ en una vencidad del punto $z=2$.

554. $z^2 \operatorname{sen}\frac{1}{z-1}$ en una vecindad del punto $z=1$.

555. $e^{z+\frac{1}{z}}$ en el recinto $0<|z|<\infty$.

556. $\operatorname{sen} z \operatorname{sen}\frac{1}{z}$ en el recinto $0<|z|<\infty$.

557. $\operatorname{sen}\frac{z}{1-z}$ en vecindades de los puntos $z=1$ y $z=\infty$ (en el ultimo caso limítese a buscar los cuatro primeros términos de la serie).

558. $\operatorname{ctg} z$ en una vecindad del punto $z=0$ y en el anillo $\pi<|z|<2\pi$.

559. $\ln\frac{z-a}{z-b}$ en una vecindad del punto $z=\infty$.

560. $\frac{1}{z-2}\ln\frac{z-i}{z+i}$ en una vecindad del punto $z=\infty$ y en el anillo $1<|z|<2$.

561. Analice si las funciones dadas admiten el desarrollo en serie de Laurent en una vecindad del punto indicado:

1) $\cos\frac{1}{z}$, $z=0$; 2) $\cos\frac{1}{z}$, $z=\infty$; 3) $\sec\frac{1}{z-1}$, $z=1$;

4) $\operatorname{ctg} z$, $z=\infty$; 5) $\operatorname{th}\frac{1}{z}$, $z=0$; 6) $\dfrac{z^2}{\operatorname{sen}\frac{1}{z}}$, $z=0$;

7) $\frac{z}{\operatorname{sen} z-3}$, $z=\infty$; 8) $\ln z$, $z=0$; 9) $\ln\frac{1}{z-1}$, $z=\infty$;

10) $\ln\frac{z-i}{z+i}$, $z=\infty$; 11) $z^{\alpha}\,(=e^{\alpha\ln z})$, $z=0$.

562. Analice si las funciones multiformes dadas poseen ramas uniformes que puedan ser desarrolladas en serie de Laurent (en serie de Taylor, en particular) en una vecindad del punto indicado:

1) $\sqrt{z}$, $z=0$; 2) $\sqrt{z(z-1)}$, $z=\infty$;

3) $\sqrt{\frac{z}{(z-1)(z-2)}}$, $z=\infty$; 4) $\sqrt[3]{(z-1)(z-2)(z-3)}$, $z=\infty$;

5) $\sqrt[4]{z(z-1)^2}$, $z=\infty$; 6) $\sqrt{1+\sqrt{z}}$, $z=1$;

7) $\sqrt{1+\sqrt{z}}$, $z=0$; 8) $\sqrt{z+\sqrt{z^2-1}}$, $z=\infty$;

9) $\sqrt{z+\sqrt{z^2-1}}$, $z=1$; 10) $\sqrt{1+\sqrt[3]{\frac{z}{z+1}}}$, $z=\infty$;

11) $\operatorname{Ln}[(z-1)(z-2)]$, $z=\infty$; 12) $\operatorname{Ln}\frac{(z-\alpha)(z-\beta)}{(z-\gamma)(z-\delta)}$, $z=\infty$;

13) $\operatorname{Arcsen} z$, $z=0$; 14) $\operatorname{Arctg}(1+z)$, $z=0$;

15) $\operatorname{Arsh}(i+z)$, $z=0$; 16) $\sqrt{\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arcsen} z}$, $z=1$;

17) $\sqrt{\frac{\pi}{4}-\operatorname{Arcsen} z}$, $z=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

563. La función $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ es analítica en el anillo $r \leqslant |z| \leqslant R$ y lo transforma univalentemente en un recinto D.

1) Demuestre que el área S de este recinto es igual a

$$S=\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} n\,|c_n|^2 (R^{2n}-r^{2n}).$$

2) Demuestre que la fórmula para el área S sigue siendo válida aún cuando $f(z)$ es analítica en el recinto $r<|z|<R$; en este caso ambos miembros de la igualdad pueden convertirse simultáneamente en el ∞.

Sugerencia. Véanse los problemas 536 y 537.

564. La función $f(z)$ es univalente en el recinto $|z|>1$ y se desarrolla en este recinto en una serie de Laurent de tipo $f(z)=z+\frac{c_{-1}}{z}+\frac{c_{-2}}{z^2}+\ldots$

Demuestre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,|c_{-n}|^2 \leqslant 1,$$

y explique el significado geométrico de la desigualdad obtenida (teorema exterior de áreas).

Sugerencia. Recurra a que para el área S_r, limitada por la imagen de la circunferencia $|z|=r>1$, se tiene $(f(z)=u+iv)$

$$0 \leqslant S_r=\int_{|z|=r} u\,dv \int_0^{2\pi} \frac{f+\bar f}{2}\,\frac{1}{2i}\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}-\frac{\partial \bar f}{\partial \varphi}\right) d\varphi.$$

§ 2. PUNTOS SINGULARES DE FUNCIONES ANALITICAS UNIFORMES

En los problemas 565—600 halle los puntos singulares de las funciones, analice la naturaleza de los mismos e investigue el comportamiento de las funciones en el infinito.[1]

565. $\frac{1}{z-z^3}$. 566. $\frac{z^4}{1+z^4}$. 567. $\frac{z^5}{(1-z)^2}$. 568. $\frac{1}{z(z^2+4)^2}$.

569. $\frac{e^z}{1+z^2}$. 570. $\frac{z^2+1}{e^z}$. 571. ze^{-z}. 572. $\frac{1}{e^z-1}-\frac{1}{z}$.

573. $\frac{e^z}{z(1-e^{-z})}$. 574. $\frac{1-e^z}{2+e^{-z}}$. 575. $\frac{1}{z^3(2-\cos z)}$. 576. $\operatorname{th} z$.

577. $e^{-\frac{1}{z^2}}$. 578. $ze^{\frac{1}{z}}$. 579. $e^{\frac{z}{1-z}}$. 580. $e^{z-\frac{1}{z}}$. 581. $\frac{e^{\frac{1}{z-1}}}{e^z-1}$.

[1]) En las respuestas no se distinguen los puntos singulares evitables de los puntos regulares.

582. $\frac{1}{\operatorname{sen} z}$. 583. $\frac{\cos z}{z^2}$. 584. $\operatorname{tg} z$. 585. $\operatorname{tg}^2 z$. 586. $\frac{\operatorname{ctg} z}{z^2}$.

587. $\operatorname{ctg} z - \frac{1}{z}$. 588. $\operatorname{ctg} z - \frac{2}{z}$. 589. $\frac{1}{\operatorname{sen} z - \operatorname{sen} a}$.

590. $\frac{1}{\cos z + \cos a}$. 591. $\operatorname{sen} \frac{1}{1-z}$. 592. $\frac{z^7}{(z^2-4)^2 \frac{1}{z-2}}$.

593. $\operatorname{ctg} \frac{1}{z}$. 594. $\operatorname{ctg} \frac{1}{z} - \frac{1}{z}$. 595. $\operatorname{sen} \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}$. 596. $e^{-z} \cos \frac{1}{z}$.

597. $e^{\operatorname{ctg} \frac{1}{z}}$. 598. $e^{\operatorname{tg} \frac{1}{z}}$. 599. $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\operatorname{sen} \frac{1}{z}}\right)$. 600. $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\cos \frac{1}{z}}\right)$.

En los problemas **601—610** analice el comportamiento en los puntos indicados de cada una de las ramas uniformes de la función multiforme dada (determine si el punto es regular o singular para la rama correspondiente; en el último caso indique el carácter de la singularidad).

601. $\frac{z}{1+\sqrt{z-3}}$, $z=4$. 602. $\frac{1}{\sqrt{z}+\sqrt[3]{z}}$, $z=1$.

603. $\frac{2z+3}{1+z-2\sqrt{z}}$, $z=1$. 604. $\cos \frac{1}{1+\sqrt{z}}$, $z=1$.

605. $\frac{1}{(2+\sqrt{z})\cos(2\sqrt{z})}$, $z=4$.

606. $\operatorname{ctg} \frac{1}{1+\sqrt{z}}$, $z=\left(1+\frac{1}{k\pi}\right)^2$, donde $k=\pm 1, \pm 2, \ldots$ y $z=1$.

607. $\frac{1}{\operatorname{sen}\left(1+\sqrt{\frac{z}{z-2}}\right)}$, $z=\frac{2(1+k\pi)}{(1+k\pi)^2-1}$, donde $k=\pm 1, \pm 2, \ldots$ y $z=\infty$.

608. $\operatorname{sen} \frac{1}{1+\sqrt{\frac{z}{z-2}}}$, $z=\infty$.

609. 1) $\frac{1}{\operatorname{sen} \frac{\operatorname{Ln} z}{2i}}$, $z=1$; 2) $\frac{1}{\operatorname{sen} \frac{\operatorname{Ln} z}{4i}}$, $z=1$.

610. $\operatorname{sen}\left(\operatorname{ctg} \frac{\operatorname{Ln} z}{4i}\right)$, $z=1$.

611. Sean $P_n(z)$ y $Q_m(z)$ polinomios de grado n y m respectivamente. Describa el comportamiento en el infinito de las funciones siguientes:

1) $P_n(z)+Q_m(z)$; 2) $\frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$; 3) $P_n(z)\,Q_m(z)$.

612. Demuestre la equivalencia de las dos definiciones siguientes: 1) El punto z_0 se llama polo de orden n de la función $f(z)$, si

para el desarrollo de Laurent de $f(z)$ en una vecindad de z_0 se tiene

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, \quad c_{-n}\neq 0, \quad c_{-(n+1)}=c_{-(n+2)}=\ldots=0.$$

2) El punto z_0 se llama polo de orden n de la función $f(z)$, si en una vecindad de este punto se tiene $f(z)=\varphi(z)/(z-z_0)^n$, donde $\varphi(z)$ es analítica y $\varphi(z_0)\neq 0$.

613. Construya ejemplos de funciones que en el plano ampliado tienen solamente las siguientes singularidades:

1) polo de segundo orden en el infinito;

2) polo de segundo orden en el punto $z=0$ con c_{-2}/z^2 como parte principal del desarrollo y polo simple en el infinito;

3) polos simples en los puntos $z_k=\omega^k$, donde

$$\omega=e^{2\pi i/n} \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1).$$

614. Halle la forma general de la función que en el plano ampliado tiene solamente las siguientes singularidades:

1) un polo simple;

2) un polo de orden n;

3) un polo de segundo orden en el punto $z=0$ con $1/z^2$ como parte principal del desarrollo;

4) un polo de orden n en el punto $z=0$ y un polo de orden m en el infinito;

5) n polos de primer orden.

615. Sea $f(z)$ una función uniforme que no tiene en el recinlo G otras singularidades, a excepción de polos. Demuestre que la función $\frac{f'(z)}{f(z)-A}$ (derivada logarítmica de la función $f(z)-A$) tiene polos simples en todos los polos de la función $f(z)$ y en todos los A-puntos de esta función y no tiene otros puntos singulares.

616. ¿Qué tipo de singularidad tiene la función $F(z)=f[\varphi(z)]$ en el punto $z=z_0$ (el caso $z_0=\infty$ se admite), si la función $\varphi(z)$ o bien es analítica en este punto o bien tiene en él un polo, mientras que el punto $\zeta_0=\varphi(z_0)$ es para la función $f(\zeta)$ una singularidad del tipo siguiente:

1) punto singular evitable; 2) polo de orden n; 3) punto singular esencial?

617. El punto z_0 (el caso $z_0=\infty$ se admite) es un punto singular aislado de la función $f(z)$ que transforma el arco circular (o el segmento rectilíneo) γ en un arco circular (o en un segmento rectilíneo) γ'. ¿Qué tipo de singularidad tiene la función $f(z)$ en el punto z_0^* simétrico a z_0 respecto a γ (la función $f(z)$ se prolonga a través de γ según el principio de simetría), si el punto z_0 es para $f(z)$:

1) un polo de orden n; 2) un punto singular esencial?

618. El teorema de Sojotski—Cassorati—Weierstrass afirma que, siendo z_0 un punto singular esencial de la función $f(z)$, cualquiera

que sea el número complejo A (incluyendo el caso $A=\infty$) existe una sucesión de puntos $\{z_n\}$ convergente hacia el punto z_0 tal que $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)=A$. Demuestre que el teorema sigue siendo válido en el caso de un punto singular no aislado que es límite de polos[1]. (A veces, puntos de este tipo se consideran simplemente como puntos singulares esenciales).

619. Halle los límites:

1) $\lim\limits_{y\to\pm\infty} \operatorname{ctg}^2 z$; 2) $\lim\limits_{y\to\pm\infty} \frac{1}{\operatorname{sen} z}$; $\lim\limits_{z\to\pm\infty} \frac{1}{\operatorname{ch} z}$; 4) $\lim\limits_{\substack{x=0\\ y\to 0}} \frac{1}{\operatorname{sen}\frac{1}{z}}$.

Contradice la existencia de estos límites al teorema de Sojotski — Cassorati — Weierstrass?

El teorema de Picard afirma que en una vecindad de un punto singular esencial la función analítica correspondiente asume infinitas veces cualquier valor finito, salvo, posiblemente, un valor que se denomina *valor excepcional de Picard*. Si se consideran las funciones meromorfas, el número posible de valores excepcionales (incluyendo el ∞) no pasa de dos (véase, por ejemplo, [1, cap. VIII, § 8, n°4]).

620. Compruebe el teorema de Picard para las funciones:

1) e^z; 2) $e^{1/z}$; 3) $\cos\frac{1}{z}$; 4) $\operatorname{tg} z$; 5) $\operatorname{tg}^2 z$.

Halle los valores excepcionales para cada una de estas funciones y demuestre que estos valores (si es que existen) son asintóticos, es decir, que se puede indicar al menos una curva que termina en el punto singular esencial a lo largo de la cual la función tiende hacia el valor excepcional.

§ 3. CALCULO DE RESIDUOS

En los problemas **621**—**624** hay que calcular los residuos de las funciones indicadas respecto a todos sus puntos singulares aislados y respecto al punto infinito (si éste no es límite de puntos singulares).

621. $\frac{1}{z^3-z^5}$. **622.** $\frac{z^2}{(z^2+1)^2}$. **623.** $\frac{z^{2n}}{(1+z)^n}$ (n es un número natural). **624.** $\frac{1}{z(1-z^2)}$. **625.** $\frac{z^2+z-1}{z^2(z-1)}$. **626.** $\frac{\operatorname{sen} 2z}{(z+1)^3}$.

627. $\frac{e^z}{z^2(z^2+9)}$. **628.** $\operatorname{tg} z$. **629.** $\frac{1}{\operatorname{sen} z}$. **630.** $\operatorname{ctg}^2 z$.

631. $\operatorname{ctg}^3 z$. **632.** 1) $\cos\frac{1}{z-2}$; 2) $z^3\cos\frac{1}{z-2}$. **633.** $e^{z+\frac{1}{z}}$.

634. $\operatorname{sen} z \operatorname{sen}\frac{1}{z}$. **635.** $\operatorname{sen}\frac{z}{z+1}$. **636.** $\cos\frac{z^2+4z-1}{z+3}$.

637. $\frac{1}{z(1-e^{-hz})}$ ($h\neq 0$). **638.** $z^n\operatorname{sen}\frac{1}{z}$ (n es un número entero).

[1] Se supone que en una vecindad del punto considerado los polos son las únicas singularidades.

639. $\dfrac{1}{\operatorname{sen}\frac{1}{z}}$. **640.** $\dfrac{\sqrt{z}}{\operatorname{sen}\sqrt{z}}$. **641.** $\dfrac{\operatorname{tg} z}{z^n}$ (n es un número natural).

En los problemas **642—649** hay que calcular los residuos de cada una de las ramas uniformes de las correspondientes funciones multiformes respecto a los puntos indicados.

642. $\dfrac{\sqrt{z}}{1-z}$ respecto al punto $z=1$.

643. $\dfrac{1}{\sqrt{2-z}+1}$ respecto al punto $z=1$.

644. $\dfrac{z^a}{1-\sqrt{z}}$ ($z^a=e^{a \operatorname{Ln} z}$) respecto al punto $z=1$.

645. $\sqrt{(z-a)(z-b)}$ respecto al punto $z=\infty$.

646. 1) $\operatorname{Ln}\dfrac{z-\alpha}{z-\beta}$ respecto al punto $z=\infty$.

2) $e^z \operatorname{Ln}\dfrac{z-\alpha}{z-\beta}$ respecto al punto $z=\infty$.

647. 1) $\operatorname{Ln} z \operatorname{sen}\dfrac{1}{z-1}$ respecto al punto $z=1$.

2) $\operatorname{Ln} z \cos\dfrac{1}{z-1}$ respecto al punto $z=1$.

648. $\dfrac{\operatorname{Arctg} z}{z}$ respecto a los puntos $z=0$ y $z=\infty$.

649. $z^n \operatorname{Ln}\dfrac{z-\alpha}{z-\beta}$ (n es un número entero) respecto a los puntos $z=0$ y $z=\infty$ (al calcular el residuo en el punto $z=0$ se supone que $\alpha\neq 0$ y $\beta\neq 0$).

650. El desarrollo de una función en una vecindad del punto infinito es de la forma $f(z)=c_0+\frac{c_1}{z}+\ldots$ Halle $\operatorname{res}[\{f(z)\}^2]_{z=\infty}$.

651. Halle $\operatorname{res}[\varphi(z)f(z)]_{z=a}$, si $\varphi(z)$ es analítica en el punto a y $f(z)$ tiene en este punto:

1) un polo simple de residuo A;

2) un polo de orden k con la parte principal $\frac{c_{-1}}{z-a}+\ldots+\frac{c_{-k}}{(z-a)^k}$.

652. Halle $\operatorname{res}\left[\dfrac{f'(z)}{f(z)}\right]_{z=a}$, si:

1) a es un cero de orden n de la función $f(z)$;

2) a es un polo de orden n de la función $f(z)$;

653. Halle $\operatorname{res}\left[\varphi(z)\dfrac{f'(z)}{f(z)}\right]_{z=a}$, si $\varphi(z)$ es analítica en el punto a y:

1) a es un cero de orden n de la función $f(z)$;

2) a es un polo de orden n de la función $f(z)$.

654. Halle $\operatorname{res}\{f[\varphi(z)]\}_{z=a}$, si la función $\varphi(z)$ es analítica en el punto a y $\varphi'(a)\neq 0$, mientras que $f(\zeta)$ tiene un polo de primer orden en el punto $\zeta=\varphi(a)$ de residuo A.

655. La función $\varphi(z)$ tiene en el punto a un polo de primer orden de residuo A, mientras que $f(\zeta)$ tiene en el infinito un polo de primer orden con la parte principal $B\zeta$. Halle res $\{f[\varphi(z)]\}_{z=a}$

656. La función $f(z)$, que toma valores reales en un arco l de la circunferencia $|z-a|=R$, ha sido prolongada analíticamente a través de este arco según el principio de simetría. Sea el punto $z=\beta$ $(\beta \neq a)$ un polo de orden k para la función $f(z)$ con la parte principal

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{c_{-n}}{(z-\beta)^n}.$$

Halle res $[f(z)]_{z=\beta^*}$, donde β^* es el punto simétrico a $z=\beta$ respecto a l.

§ 4. CALCULO DE INTEGRALES

APLICACION DIRECTA DEL TEOREMA DE LOS RESIDUOS

En los problemas **657—666** calcule las integrales aceptando que el recorrido de los contornos cerrados se realiza en la dirección positiva.

657. $\int_C \frac{dz}{z^4+1}$, donde C es la circunferencia $x^2+y^2=2x$.

658. $\int_C \frac{z\,dz}{(z-1)(z-2)^2}$, donde C es la circunferencia $|z-2|=\frac{1}{2}$.

659. $\int_C \frac{dz}{(z-3)(z^5-1)}$, donde C es la circunferencia $|z|=2$.

Sugerencia. Recurra a que la suma de los residuos respecto a todos los puntos singulares (incluyendo el infinito) es igual a cero.

660. $\int_C \frac{z^3\,dz}{2z^4+1}$, donde C es la circunferencia $|z|=1$.

661. $\int_C \frac{e^z}{z^3(z^2-9)}\,dz$, donde C es la circunferencia $|z|=1$.

662. $\frac{1}{2\pi i}\int_C \operatorname{sen}\frac{1}{z}\,dz$, donde C es la circunferencia $|z|=r$.

663. $\frac{1}{2\pi i}\int_C \operatorname{sen}^2\frac{1}{z}\,dz$, donde C es la circunferencia $|z|=r$.

664. $\frac{1}{2\pi i}\int_C z^n e^{\frac{2}{z}}\,dz$, donde n es un número entero y C es la circunferencia $|z|=r$.

665. $\int_{|z|=3} (1+z+z^2)\left(e^{\frac{1}{z}}+e^{\frac{1}{z-1}}+e^{\frac{1}{z-2}}\right)dz.$

666. $\displaystyle\int\limits_{|z|=5} \frac{z\,dz}{\operatorname{sen} z\,(1-\cos z)}$.

667. Calcule la integral $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{C} \frac{f(z)}{zg(z)}\,dz$, donde C es un contorno cerrado simple que limita un recinto G que contiene el punto $z=0$. Las funciones $f(z)$ y $g(z)$ son analíticas en el recinto cerrado $\bar{G}$, con la particularidad de que la función $g(z)$ no se anula en el contorno C y tiene en el recinto G solamente ceros simples $a_1, a_2, \ldots, a_n$, ninguno de los cuales coincide con el origen de coordenadas.

668. Sea $f(z)=a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n$. Demuestre que

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=R} z^{n-1}\,|f(z)|^2\,dz = a_0\bar{a}_nR^{2n}.$$

En los problemas 669—672 calcule las integrales dadas.

669. $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{C} \frac{dz}{\sqrt{z^2+z+1}}$, donde C es la circunferencia $|z|=r\neq 1$.

670. $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{C} \frac{dz}{(z^2+1)\sqrt{z^2+1}}$ $(\sqrt{1}=1)$, donde C es la parábola $y^2=x$ recorrida en la dirección de crecimiento de y.

671. $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{C} \frac{dz}{a^z \operatorname{sen} \pi z}$ $(a^z=e^{z\ln a})$, donde $a>0$, mientras que C es la recta $x=\alpha$, $0<\alpha<1$ recorrida desde abajo hacia arriba.

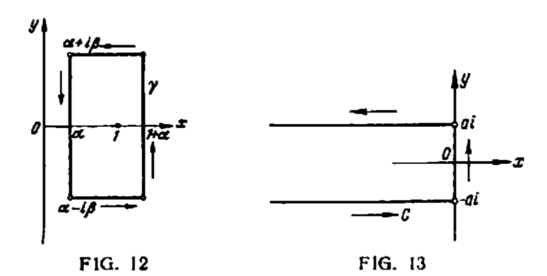


FIG. 12 FIG. 13

Sugerencia. Considere $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{\gamma} \frac{dz}{a^z \operatorname{sen} \pi z}$, donde el contorno γ se indica en la fig. 12, y pase al límite para $\beta \to \infty$

672. $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{C} \frac{e^z dz}{\cos z}$, donde el contorno de integración C se indica en la fig. 13.

Si la función $f(x)$ se hace infinita para $x=c\ (a<c<b)$, el valor principal según Cauchy de la integral $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ se define mediante

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx+\int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx\right].$$

De modo natural esta definición se generaliza al caso de una integral curvilínea.

Si la función $f(x)$ es continua en todo el eje real, el valor principal de la integral $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ se define mediante $\lim\limits_{N\to\infty}\int\limits_{-N}^{N} f(x)\,dx$.

En los problemas **673—680** halle las integrales definidas. En el caso en que la integral sea impropia y diverja, halle su valor principal (si éste existe).

673. $\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{a+\cos\varphi}\ (a>1)$.

Sugerencia. Tome $e^{i\varphi}=z$.

674. $\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{(a+b\cos\varphi)^2}\ (a>b>0)$.

675. $\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{(a+b\cos^2\varphi)^2}\ (a>0,\ b>0)$.

676. $\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}$ (a es un número complejo y $a\neq\pm 1$).

677. $\int\limits_0^{2\pi}\frac{\cos^2 3\varphi\,d\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}$ (a es un número complejo y $a\neq\pm 1$).

678. $\int\limits_0^{2\pi} e^{\cos a}\cos(n\varphi-\operatorname{sen}\varphi)\,d\varphi$ (n es un número entero).

679. $\int\limits_0^{\pi}\operatorname{tg}(x+ia)\,dx$ (a es un número real).

680. $\int\limits_0^{2\pi}\operatorname{ctg}(x+a)\,dx$ (a es un número complejo e $\operatorname{Im} a\neq 0$).

681. Demuestre que para $b > a > -1$ se tiene

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^a \varphi \cos b\varphi d\varphi = \frac{\pi \Gamma(a+1)}{2^{a+1} \Gamma\left(\frac{a+b}{2}+1\right) \Gamma\left(\frac{a-b}{2}+1\right)}.$$

Sugerencia. Considere $\int\limits_C \left(z+\frac{1}{z}\right)^a z^{b-1}\,dz$, donde C es el contorno representado en la fig. 14, y haga tender hacia cero los radios de los arcos de las circunferencias pequeñas. Al calcular la integral a lo largo del segmento vertical, divídala en dos, reduciendo éstas, mediante sustituciones correspondientes, a integrales eulerianas de primera especie; emplee asimismo la conocida relación entre las integrales eulerianas

$$\mathrm{B}(p, q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \text{ y la fórmula } \Gamma(p)\,\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi p}.$$

FIG. 14

En los problemas **682—688** calcule las integrales de límites infinitos.

682. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{(x^2+4x+13)^2}$.

683. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)^2}$ $(a > 0)$.

684. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n}$ (n es un número natural).

685. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ $(a > 0,\ b > 0)$.

686. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx$. **687.** $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^n}$ ($n \geqslant 2$ es un número natural).

Sugerencia. Considere la integral $\int\limits_C \frac{dz}{1+z^n}$, donde C es el contorno compuesto por los rayos $\arg z = 0$ y $\arg z = 2\pi/n$ y por el arco de la circunferencia que los une.

688. $\displaystyle\int_0 \frac{x^n}{1+x^{2n}}\,dx$ $(n \geqslant 2)$.

Observación. El método de cálculo de integrales empleado en los problemas 687 y 688 se extiende a integrales de funciones racionales de tipo $R(x^n)$.

689. Demuestre que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{d\tau}{\tau^n \bar{\tau}^k} = \frac{i^{k-n-1}(n+k-2)!}{(2h)^{n+k-1}(k-1)!(n-1)!} \quad (n \text{ y } k \text{ son números naturales}),$$

donde C es la recta paralela al eje real que corta en el eje imaginario un segmento igual a $h\,(h>0)$.

690. Calcule la integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{d\tau}{\bar{\tau}^k(\tau - z)} \quad (k \text{ es un número natural}).$$

donde C es el contorno del problema anterior.

En los problemas **691—694** calcule las integrales dadas, empleando el lema de Jordan (véase el problema **402**).

691. 1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x\,dx}{x^2-2x+10}$; 2) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x\,\mathrm{sen}\,x\,dx}{x^2-2x+10}$.

692. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,\mathrm{sen}\,x\,dx}{x^2+4x+20}$.

693. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2+b^2}\,dx$ (a y b son números positivos).

694. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x\,\mathrm{sen}\,ax}{x^4+b^4}\,dx$ (a y b son números positivos).

695. Sea $f(z)=e^{imz}F(z)$, donde $m>0$ y la función $F(z)$ posee las propiedades siguientes:

1) en el semiplano siperior tiene un número finito de puntos singulares $a_1, a_2, \ldots, a_n$;

2) es analítica en todos los puntos del eje real, a excepción de los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_m$ que son polos simples;

3) $F(z)\to 0$, para $z\to\infty$ e $\mathrm{Im}\,z\geqslant 0$.

Demuestre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i\left\{\sum_{k=1}^{m} \mathrm{res}\,[f(z)]_{z=a_k} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} \mathrm{res}\; f(z)_{z=x_k}\right\}$$

donde la integral se entiende en el sentido del valor principal (respecto a todos los puntos x_k y al ∞).

En los problemas **696—700** halle los valores principales de las integrales dadas (t es un número real).

696. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{x}\,dx$. **697.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x\,dx}{x^2-5x+6}$.

698. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{(x^2+4)(x-1)}$. **699.** $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos tx}{1-x^3}\,dx$. **700.** $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos tx}{1-x^4}\,dx$.

En los problemas **701—706** calcule las integrales dadas (a y b son números positivos).

701. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^2-b^2}{x^2+b^2}\,\frac{\operatorname{sen} ax}{x}\,dx$. **702.** $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} ax\,dx}{x(x^2+b^2)}$.

703. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} ax\,dx}{x(x^2+b^2)^2}$. **704.** $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos 2ax-\cos 2bx}{x^2}\,dx$.

705. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x^2}{x^2}\,dx$.

Sugerencia. Emplee la integral $\int\limits_{C} \frac{e^{2iz}-1}{z^2}\,dz$, donde el contorno C es el indicado en la fig. 15.

706. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^3 x}{x^3}\,dx$.

Sugerencia. Emplee la integral $\int\limits_{C} \frac{e^{3iz}-3e^{iz}+2}{z^3}\,dz$, donde el contorno C es el indicado en la fig. 15.

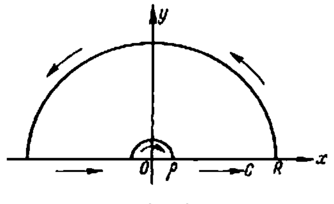


FIG. 15

En los problemas **707—710** calcule las integrales considerando que $x^p > 0$ para $x > 0$ (esta condición se mantiene en todos los problemas sucesivos).

707. 1) $\int\limits_{0}^{\infty} x^{p-1}\cos ax\,dx \quad (a > 0,\ 0 < p < 1)$;

2) $\int\limits_{0}^{\infty} x^{p-1}\operatorname{sen} ax\,dx \quad (a > 0,\ -1 < p < 1)$.

Sugerencia. Emplee la integral $\int\limits_C z^{p-1}e^{-az}\,dz$, donde el contorno C es el indicado en la fig. 16.

708. $\int\limits_0^\infty \cos x^p\,dx \quad (p > 1)$. **709.** $\int\limits_0^\infty \operatorname{sen} x^p\,dx \quad (|p| > 1)$.

710. $\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x^p}{x^p}\,dx \left(p > \frac{1}{2}\right)$.

---

711. Sea $f(z)$ una función racional que tiene polos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, ninguno de los cuales pertenece a la parte positiva del eje real ni

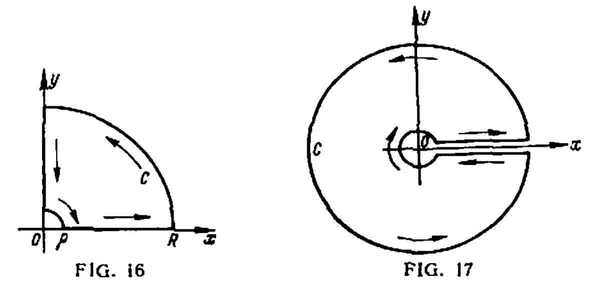


FIG. 16 FIG. 17

es igual a cero, y sea p un número real tal que

$$\lim_{z\to 0}[z^{p+1}f(z)] = \lim_{z\to\infty} z^{p+1}f(z) = 0.$$

Demuestre que:

1) Si p no es un número entero, se tiene

$$\int\limits_0^\infty x^p f(x)\,dx = -\frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi p} e^{-\pi p i} \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}\,[z^p f(z)]_{z=\alpha_k}$$

2) Si p es un número entero, se tiene

$$\int\limits_0^\infty x^p f(x)\,dx = -\sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}\,[z^p \operatorname{Ln} z\cdot f(z)]_{z=\alpha_k},$$

donde

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \arg z \quad \text{y} \quad 0 \leqslant \arg z < 2\pi.$$

Sugerencia. Considere las integrales $\int\limits_C z^p f(z)\,dz$ y $\int\limits_C z^p \operatorname{Ln} z\cdot f(z)\,dz$, donde C es el contorno representado en la fig. 17.

712. Calcule $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^p(x+1)}$ $(0 < p < 1)$.

713. Demuestre que

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi a} \quad (0 < a < 1).$$

Sugerencia. Use la conocida relación entre las integrales eulerianas $\Gamma(a)\Gamma(b) = \Gamma(a+b)\,B(a, b)$ y realice en la integral, que define la función Beta $B(a, b) = \int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$ el cambio de variable tomando $x = y/(1+y)$.

Observación. La relación, demostrada en el problema solamente para valores reales de a comprendidos en el intervalo $(0, 1)$, es válida para todos los números complejos. Para $z = -n$, donde n es un número natural, ambos miembros de la igualdad se hacen igual al ∞.

En los problemas **714—716** calcule las integrales dadas.

714. $\int\limits_0^\infty \frac{x^p\,dx}{1+x^2}$ $(-1 < p < 1)$.

715. $\int\limits_0^\infty \frac{x^p}{(1+x^2)^2}$ $(-1 < p < 3)$.

716. $\int\limits_0^\infty \frac{x^p\,dx}{x^2+2x\cos\lambda+1}$ $(-1 < p < 1, \ -\pi < \lambda < \pi)$.

717. Sea $f(z)$ una función racional que en la parte positiva del eje real tiene solamente polos de primer orden $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$, y entre los demás polos suyos (si existen) $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ninguno es igual a cero. Sea, además, p un número real que

$$\lim_{z\to 0}\,[z^{p+1}f(z)] = \lim_{z\to\infty}\,[z^{p+1}f(z)] = 0.$$

Comprendiendo por la integral su valor principal, demuestre que

1) Si p no es un número entero, se tiene

$$\int\limits_0^\infty x^p f(x)\,dx = -\frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi p}\,e^{-\pi p i}\sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}\,[z^p f(z)]_{z=\alpha_k} -$$

$$-\pi \operatorname{ctg}\pi p \sum_{k=1}^{m} \beta_k^p \operatorname{res}\,[f(z)]_{z=\beta_k},$$

donde $x^p > 0$ para $x > 0$.

2) Si p es un número entero, se tiene

$$\int_0^\infty x^p f(x)\,dx = -\sum_{k=1}^{n} \text{res}\,[z^p \operatorname{Ln} z \cdot f(z)]_{z=a_k} -$$

$$- \sum_{k=1}^{m} \beta_k^p (\ln \beta_k + \pi i)\, \text{res}\,[f(z)]_{z=\beta_k};$$

la rama de $\operatorname{Ln} z$ se escoge igual que en el problema **711**.

En los problemas **716—721** calcule los valores principales de las integrales.

716. $\int\limits_0^\infty \frac{x\,dx}{x^4-1}$. **719.** $\int\limits_0^\infty \frac{x^2\,dx}{x^4-1}$.

720. $\int\limits_0^\infty \frac{x^p\,dx}{1-x}$ $(-1 < p < 0)$.

721. $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{e^{px}\,dx}{1-e^x}$ $(0 < p < 1)$.

En los problemas **722—726** calcule las integrales dadas.

722. $\int\limits_0^1 \frac{x^{1-p}(1-x)^p}{(1+x)^3}\,dx$ $(-1 < p < 2)$.

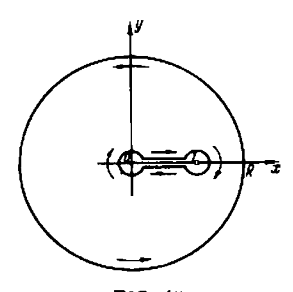


FIG. 18

Sugerencia. Considere $\int\limits_C \frac{z^{1-p}(1-z)^p}{(1+z)^3}\,dz$, donde C es el contorno representado en la fig. 18, que limita un recinto biconexo, y pase al límite para $R \to \infty$.

723. $\int\limits_0^1 \frac{x^{1-p}(1-x)^p}{1+x^2}\,dx$ $(-1 < p < 2)$.

Sugerencia. Demuestre que $\lim\limits_{R \to \infty} \int\limits_{C_R} \frac{z^{1-p}(1-z)^p}{1+z^2} dz = 2\pi i e^{-p\pi i}$, donde C_R es la circunferencia $|z| = R$ recorrida en la dirección positiva.

724. $\int\limits_0^1 \frac{x^{1-p}(1-x)^p dx}{(1+x)^3} \quad (-1 < p < 2)$.

725. $\int\limits_0^1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^p \frac{dx}{x+a} \quad (-1 < p < 1, \ a > 0)$.

726. $\int\limits_0^1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^p \frac{dx}{(x+a)^2} \quad (-1 < p < 1, \ a > 0)$.

727. $\int\limits_{-1}^1 \frac{(1+x)^{1-p}(1-x)^p}{1+x^2} dx \quad (-1 < p < 2)$.

728. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt[3]{x^2(1-x)}}$.

729. Calcule la integral $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{(x-a)\sqrt{1-x^2}}$, donde $\sqrt{1-x^2} > 0$ para $-1 < x < 1$, a es un número complejo y $a \neq \pm 1$. Halle, en particular, los valores de la integral para $a = \pm e^{i\alpha}$ $(0 < \alpha < \pi)$, $a = iy$ y para $-1 < a < 1$ (el valor principal).

730. Calcule la integral $\int\limits_0^1 \frac{x^{p-1}(1-z)^{-p}}{b-x} dx$, donde $0 < p < 1$, b es un número complejo y $b \neq 0$ y $b \neq 1$.

731. Calcule la integral $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}}$ $(n = 2, 3, \ldots)$.

Sugerencia. Considere la integral $\int\limits_C \frac{dz}{\sqrt[n]{1-z^n}}$, donde C es el contorno formado por los cortes a lo largo de los radios vectores de los puntos $1, \omega, \omega^2, \ldots$ $\ldots, \omega^{n-1}$, donde $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$, y por la circunferencia $|z| = R > 1$. (Esta integral puede ser también calculada empleando la función Beta de Euler).

En los problemas **732—737** calcule las integrales $(a > 0)$.

732. $\int\limits_0^\infty \frac{\ln x \, dx}{x^2 + z^2}$.

Sugerencia. Considere la integral $\int\limits_C \frac{\ln z\, dz}{z^2+a^2}$, donde C es el contorno indicado en la fig. 19.

733. $\int\limits_0^{\infty} \frac{\ln^2 x\, dx}{x^2+a^2}$. **734.** $\int\limits_0^{\infty} \frac{\ln x\, dx}{\sqrt{x}\,(x^2+a^2)^2}$.

735. $\int\limits_0^{\infty} \frac{\ln x\, dx}{\sqrt{x}\,(x+1)^2}$. **736.** $\int\limits_0^{1} \ln\left(\frac{1}{x}-x\right)\frac{dx}{1+x^2}$.

Sugerencia. Calcule la parte real de la integral

$$\int\limits_C \ln\left(\frac{1}{z}-z\right)\frac{dz}{1+z^2},$$

donde C es el contorno indicado en la fig. 20.

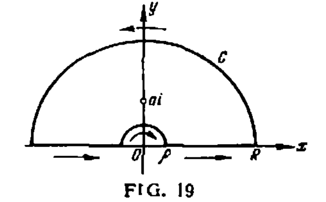


FIG. 19

FIG. 20

737. $\int\limits_0^{1} \ln\frac{1-x}{x}\,\frac{dx}{x+a}$.

738. Sea $f(z)$ una función racional sin polos en parte positiva del eje real ni en el punto $z=0$ y tal que $f(z)=O\left(\frac{1}{z}\right)$ para $z\to\infty$.

Demuestre que

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{f(x)\,dx}{\ln^2 x+\pi^2} = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}\left[\frac{f(z)}{\operatorname{Ln} z-\pi i}\right]_{z=a_k},$$

donde $a_1=-1$, mientras que $a_2, a_3, \ldots, a_n$ son los polos de la función $f(z)$, diferentes de -1, y $\operatorname{Ln} z=\ln|z|+i\arg z$, $0\leqslant\arg z<2\pi$.

Sugerencia. Considere la integral $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(z)}{\operatorname{Ln} z-\pi i}\,dz$, donde C es el contorno indicado en la fig. 21.

En los problemas **739—741** calcule las integrales considerando que $a>0$ y que n es un número natural.

739. 1) $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{(x+a)(\ln^2 x+\pi^2)}$;

2) $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)(\ln^2 x+\pi^2)}$.

740. $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)[\ln^2 x+(2n+1)^2\pi^2]}$.

Sugerencia. Considere la integral

$$\int_C \frac{1}{z^2+a^2}\left[\frac{1}{\operatorname{Ln} z-(2n+1)\pi i}+\frac{1}{\operatorname{Ln} z-(2n-1)\pi i}+\ldots+\frac{1}{\operatorname{Ln} z+(2n-1)\pi i}\right]dz$$

donde el contorno C se indica en la fig. 21 y la rama de $\operatorname{Ln} z$ se escoge igua que en el problema 738.

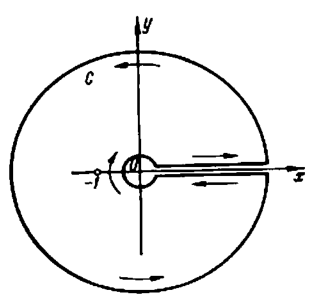


FIG. 21

741. $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)(\ln^2 x+4n^2\pi^2)}$.

Sugerencia. Considere la integral

$$\int_C \frac{1}{z^2+a^2}\left[\frac{1}{\operatorname{Ln} z-2n\pi i}+\frac{1}{\operatorname{Ln} z-(2n-2)\pi i}+\ldots+\frac{1}{\operatorname{Ln} z+(2n-2)\pi i}\right]dz,$$

donde el contorno C se indica en la fig. 22 y la rama de $\operatorname{Ln} z$ escoge igual que en el problema 738.

742. Sea $f(z)$ una función racional que no tiene polos en el contorno no cerrado C que empieza en el punto a y termina en el punto b.

Demuestre que

$$\int_C f(z)\,dz=\sum \operatorname{res}\left[f(z)\operatorname{Ln}\frac{z-b}{z-a}\right]+\operatorname{res}\left[f(z)\operatorname{Ln}\frac{z-b}{z-a}\right]_{z=\infty},$$

donde la suma se efectúa respecto a todos los polos de la función $f(z)$ diferentes del ∞ (la rama uniforme del logaritmo fuera de C se escoge arbitrariamente).

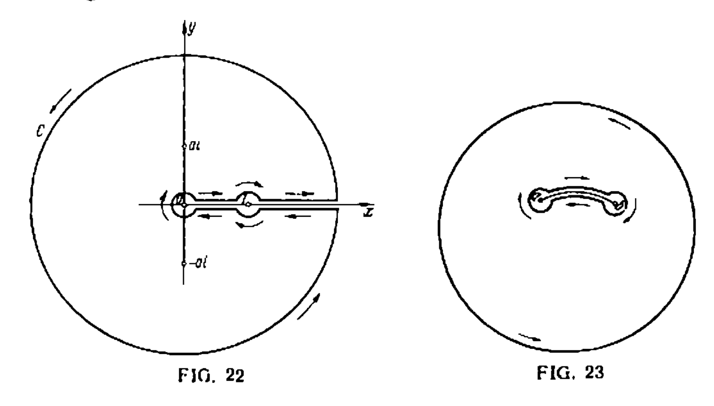


FIG. 22 FIG. 23

Sugerencia. Considere $\int\limits_{\Gamma} f(z) \operatorname{Ln} \frac{z-b}{z-a} dz$, donde el contorno Γ, que limita un recinto biconexo, se indica en la fig. 23.

En los problemas **743—746** halle las integrales dadas considerando que a es un número real.

743. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}\, dx}{(e^x+1)(e^x+2)}$ $(0<a<2)$.

Sugerencia. Considere la integral $\int\limits_{C} \frac{e^{az}}{(e^z+1)(e^z+2)} dz$ donde C es el rectángulo con vértices en $-R$, R, $R+2\pi i$ y $-R+2\pi i$.

744. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} ax\, dx}{\operatorname{sh} x}$.

Sugerencia. Considere la integral $\int\limits_{C} \frac{e^{aiz}\, dz}{\operatorname{sh} z}$, donde el contorno C se indica en la fig. 24.

745. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos ax\, dx}{\operatorname{ch} x}$.

746. $\int\limits_0^\infty \frac{x\cos ax\,dx}{\operatorname{sh} x}$. **747.** $\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{ch} ax}{\operatorname{ch}\pi x}\,dx\;(-\pi < a < \pi)$.

Sugerencia. Haga uso de la integral $\int\limits_C \frac{e^{az}\,dz}{\operatorname{ch}\pi z}$, donde C es la frontera del rectángulo $-\alpha \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant \alpha$, $0 \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant 1$.

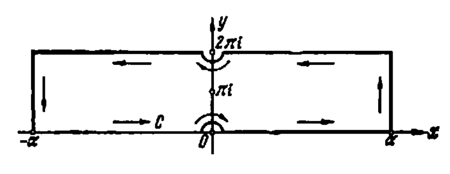


FIG. 24

748. $\int\limits_0^\pi \frac{x\operatorname{sen} x\,dx}{1+a^2-2a\cos x}\;(a > 0)$.

Sugerencia. Haga uso de la integral $\int\limits_C \frac{z\,dz}{a-e^{-iz}}$, donde C es la frontera del rectángulo $-\pi \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant \pi$, $0 \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant h$, y pase al límite para $h \to \infty$.

INTEGRALES RELACIONADAS CON LA FÓRMULA DE INVERSIÓN DE LA TRANSFORMACIÓN DE LAPLACE

Desde este momento y hasta el final del parágrafo se supone que $t > 0$ y que C_1 es la recta $\operatorname{Re} z = \alpha > 0$, recorrida desde abajo hacia arriba, con la particularidad de que α se ha escogido de manera que todos los puntos singulares del integrando se encuentran a la izquierda de C_1.

749. Demuestre que, si $f(z) \to 0$ para $\operatorname{Im} z \to \pm\infty$, $\alpha_1 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant \alpha_2$ y la función $f(z)$ es analítica en la franja $\alpha_1 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant \alpha_2$, entonces la integral $\int\limits_C f(z)\,dz$, donde C es la recta $\operatorname{Re} z = \alpha$, no depende de cómo se escoge α siempre que $\alpha_1 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2$.

En los problemas **750—755** halle las integrales (n es un número natural).

750. 1) $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1} \frac{e^{zt}\,dz}{z^{n+1}}$; 2) $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1} \frac{t^z\,dz}{z^{n+1}}\;(t^z = e^{z\ln t})$.

751. $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1} \frac{e^{zt}\,dz}{(z-a)^{n+1}}$. **752.** $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1} \frac{e^{zt}\,dz}{z^2+1}$.

753. 1) $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1}\frac{ze^{zt}\,dz}{z^2+1}$; 2) $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1}\frac{e^{zt}}{z^2(z^2+1)}\,dz$

754. $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1}\frac{e^{zt}\,dz}{(z-a)(z-b)(z-c)}$. **755.** $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1}\frac{t^z\,dz}{z(z+1)\ldots(z+n)}$.

---

756. Empleando la identidad $\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi z}$ (véase la observación al problema **713**) demuestre que para $\operatorname{Re}\nu<0$ se tiene

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{e^z\,dz}{z^{\nu+1}}=\frac{1}{\Gamma(\nu+1)},$$

donde el contorno γ se indica en la fig. 25.

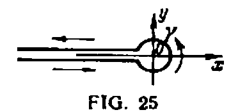


FIG. 25

Observación. Como la integral $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{e^z\,dz}{z^{\nu+1}}$ converge también para $\operatorname{Re}\nu\geqslant 0$, prolonga analíticamente $\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}$ en todo el plano.

757. Demuestre que para $\operatorname{Re}\nu>-1$ se tiene

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1}\frac{e^{zt}\,dz}{z^{\nu+1}}=\frac{t^\nu}{\Gamma(\nu+1)}.$$

En los problemas **756—769** halle las integrales dadas.

756. 1) $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1}\frac{e^{zt}\,dz}{\sqrt{1+z}}$; 2) $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1}\frac{e^{zt}\,dz}{\sqrt{z+1}}$. **759.** $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1}\frac{e^{zt}\,dz}{z\sqrt{1+z}}$.

760. $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1}\frac{e^{zt}\,dz}{(z+1)\sqrt{z+2}}$. **761.** $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1}\frac{e^{zt}(1+e^{-nz})}{z^2+1}\,dz$.

762. $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1}\frac{e^{zt}(1-e^{-az})^2}{z}\,dz\ (a>0)$. **763.** $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1}\frac{e^{zt}\,dz}{z(1-e^{-az})}\ (a>0)$.

Sugerencia. Haga uso del desarrollo

$$\frac{1}{1-e^{-az}}=1+e^{-az}+e^{-2az}+\ldots$$

764. $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1}\frac{e^{tz-x\sqrt{z}}}{z}\,dz\ (x>0)$.

Sugerencia. Sustituya C_1 por el contorno indicado en la fig. 26.

765. $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1}\frac{e^{zt}\,\mathrm{sh}\,r\sqrt{z}}{rz\,\mathrm{sh}\,a\sqrt{z}}\,dz\ (a > r > 0)$. **766.** $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1}\frac{\ln(1+z)\,e^{zt}}{z}\,dz$.

767. $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1} e^{zt}\ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right)dz$. **768.** $\int\limits_0^\infty dt\int\limits_{C_1}\frac{e^{z-\frac{at}{z}}}{z^2}\,dz\ (a > 0)$.

Sugerencia. Cambie el orden de integración.

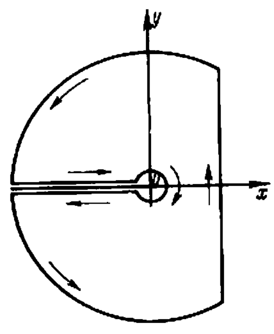


FIG. 26

769. $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1}\frac{e^{bz}}{z}\,dz\int\limits_0^\infty e^{-az\,\mathrm{ch}\,x}\,dx$ ($a > 0$ y b es un número real).

Sugerencia. Haga uso del hecho de que $\int\limits_{C_1}\frac{e^{-uz}}{z}\,dz=0$ para $u > 0$.

770. A partir del desarrollo en serie de la función de Bessel

$$J_\nu(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k}$$

demuestre las representaciones integrales (γ es el contorno indicado en el problema 756):

1) $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{e^{\zeta-\frac{z^2}{4\zeta}}}{\zeta^{\nu+1}}\,d\zeta=\left(\frac{2}{z}\right)^{\nu}J_\nu(z)$;

2) $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1}\frac{e^{\zeta-\frac{z^2}{4\zeta}}}{\zeta^{\nu+1}}\,d\zeta=\left(\frac{2}{z}\right)^{\nu}J_\nu(z)\ (\mathrm{Re}\,\nu > -1)$.

Sugerencia. Desarrolle en serie la función $e^{-\frac{z^2}{4\zeta}}$ y haga uso de las soluciones de los problemas 756 y 757.

771. Demuestre que para $\operatorname{Re} z > 0$ se tiene

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma e^{iz \operatorname{sen} - i\nu\zeta} d\zeta,$$

donde Γ es el contorno indicado en la fig. 27, y deduzca de aquí que, siendo n un número entero o cero, se tiene

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(z \operatorname{sen} \zeta - n\zeta)\, d\zeta.$$

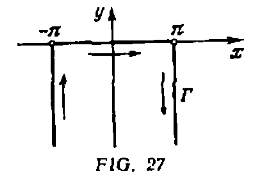


FIG. 27

En los problemas **772—774** halle las integrales que contienen las funciones de Bessel.

772. $\int_0^\infty e^{-zt} J_n(t)\, dt$ ($\operatorname{Re} z > 0$, n es un número entero).

Sugerencia. Haga uso de la representación integral del problema anterior y cambie el orden de integración.

773. 1) $\int_0^\infty J_0(at) \cos bt\, dt$; 2) $\int_0^\infty J_0(at) \operatorname{sen} bt\, dt$ (a y b son números positivos).

774. $\int_0^\infty \cos bx \frac{\operatorname{sen} t\sqrt{x^2 - a^2}}{\sqrt{x^2 - a^2}}\, dx$ ($t > |b|$).

Sugerencia. Haga uso del hecho de que

$$\frac{\operatorname{sen} ut}{u} = \sqrt{\frac{\pi t}{2u}} J_{\frac{1}{2}}(ut) = \frac{\sqrt{\pi t}}{2} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{e^{z - \frac{u^2 t^2}{4z}}}{z^{\frac{3}{2}}}\, dz$$

(véase el problema 770) y cambie el orden de integración.

COMPORTAMIENTO ASINTOTICO DE INTEGRALES [1]

775. Sea $\varphi(z)$ una función analítica que a la izquierda de C_1 tiene solamente un número finito de puntos singulares, todos ellos

[1]) Acerca de este grupo de problemas, así como acerca de la aplicación de las estimaciones asintóticas y de otros métodos para obtenerlas, véase, por ejemplo,

polos, y tal que $\varphi(z) \longrightarrow 0$ para $z \longrightarrow \infty$ y $\operatorname{Re} z \leqslant \alpha$. Sea

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} e^{zt} \varphi(z)\, dz.$$

Halle $\lim\limits_{t \to \infty} f(t)$. Considere diferentes casos de la distribución de los polos respecto al eje imaginario.

Sugerencia. Haga uso del lema de Jordan (véase el problema 402).

776. Sea $\varphi(z)$ una función analítica que a la izquierda de C_1 tiene un número finito de puntos singulares y tal que $\varphi(z) \longrightarrow 0$ para $z \longrightarrow \infty$ y $\operatorname{Re} z \leqslant \alpha$.

Demuestre que para grandes valores de t tiene lugar la igualdad asintótica

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} e^{zt} \varphi(z)\, dz \sim \sum \operatorname{res}\left[e^{zt} \varphi(z)\right],$$

donde la suma se extiende a todos los puntos singulares de $\varphi(z)$ de parte real no negativa.

Observación. Las funciones $f(t)$ y $F(t)$ son *asintóticamente iguales* para $t \longrightarrow \infty\, [f(t) \sim F(t)]$, si $\lim\limits_{t \to \infty} \frac{f(t)}{F(t)} = 1$.

777. Analice el comportamiento asintótico para $t \longrightarrow \infty$ de la función

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{e^{zt}\, dz}{z^2 (z+a)^3} \quad (\operatorname{Re} a > 0).$$

778. Halle la expresión asintótica para $t \longrightarrow \infty$ de la función

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{ze^{zt - \sqrt{z^2+2az}}}{(z - \omega i) \sqrt{z^2 + 2az}}\, dz \quad (\omega > 0,\ a > 0),$$

donde $\sqrt{z^2 + 2az} > 0$ para $z > 0$.

Sugerencia. Sustituya el contorno C_1 por el contorno indicado en la fig. 26 y demuestre que las integrales a lo largo de los arcos de las circunferencias y a lo largo de la parte negativa del eje real tienden hacia cero cuando $t \longrightarrow \infty$.

La serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{z^n}$ se llama desarrollo asintótico de la función $f(z)$ para $z \longrightarrow \infty$, si $\lim\limits_{z \to \infty} z^k \left[f(z) - \sum\limits_{n=0}^{k} \frac{c_n}{z^n} \right] = 0$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. (¡Esto no implica la convergencia de la serie!)

[2, cap. V, § 3]; Б. А. Фукс и В. И. Левин, Функции комплексного переменного и некоторые их приложения, Гостехиздат, 1951 (*Fuks B. A.* y *Levin V. I.*, Funciones de variable compleja y algunas de sus aplicaciones), cap. IV; М. А. Евграфов, Асимптотические оценки и целые функции, Физматгиз, 1962 (*Evgráfov M. A.*, Acotaciones asintóticas y funciones enteras).

Con frecuencia se consideran también desarrollos asintóticos de tipo más general. Sea $\{q_n(z)\}$ una sucesión arbitraria de funciones tal que $\lim\limits_{z\to\infty}\frac{q_{n+1}(z)}{q_n(z)}=0$ y sea $\{\mu_n(z)\}$ una sucesión que verifica las condiciones

$$\lim_{z\to\infty}\frac{\mu_{n+1}(z)}{q_n(z)}=0,\quad \overline{\lim_{z\to\infty}}\left|\frac{\mu_n(z)}{q_n(z)}\right|>0.$$

La serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n\mu_n(z)$ se llama desarrollo de la función $f(z)$:

$$f(z)\sim\sum_{n=0}^{\infty}c_n\mu_n(z),$$

si $\lim\limits_{z\to\infty}\frac{1}{q_k(z)}\left[f(z)-\sum\limits_{n=0}^{k}c_n\mu_n(z)\right]=0$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$.

Con frecuencia a título de la sucesión $\{\mu_n(z)\}$ se escoge la sucesión $\{1/z^{\alpha_n}\}$, donde α_n son números reales positivos que tienden monótonamente hacia el ∞.

779. Demuestre que para $x>0$

$$\int_0^{\infty}\frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt\sim\frac{1}{x}-\frac{2!}{x^3}+\frac{4!}{x^5}-\ldots+(-1)^n\frac{(2n)!}{x^{2n+1}}+\ldots$$

Sugerencia. Haga uso de la igualdad

$$\frac{1}{1+t^2}=1-t^2+t^4-\ldots+(-1)^nt^{2n}+\frac{(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2}$$

y estime el resto.

780. Demuestre que para $x>0$

$$\int_x^{\infty}\frac{e^{x-t}}{t}\,dt\sim\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}-\ldots+(-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}}+\ldots$$

Sugerencia. Integre por partes y estime el resto.

781*. Demuestre que para $x>0$

$$\int_{-x}^{\infty}\frac{e^{-x-t}}{t}\,dt\sim-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}+\ldots+\frac{(n-1)!}{x^n}+\ldots\right),$$

donde la integral se entiende en el sentido del valor principal.

782. Demuestre que para valores reales de x

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-t^2}\,dt}{t-x}\sim-\sqrt{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\,\frac{1}{x^{2n+1}},$$

donde la integral se entiende en el sentido del valor principal.

783. Demuestre que para valores reales de x

$$\int_0^\infty \frac{t^\alpha e^{-t^\beta}}{t-x}\,dt \sim \frac{1}{\beta}\sum_{n=1}^\infty \Gamma\left(\frac{\alpha+n}{\beta}\right)\frac{1}{x^n} \quad (\alpha>-1,\ \beta>0),$$

donde la integral para $x>0$ se entiende en el sentido del valor principal.

784*. Demuestre que

$$\int_0^z e^{z^2-t^2}\,dt \sim \pm\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{z^2} - \left(\frac{1}{2z}-\frac{1}{2^2z^3}+\frac{1\cdot 3}{2^3z^5}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^4z^7}+\dots\right),$$

donde los signos + ó — se toman según sea $\operatorname{Re} z>0$ o $\operatorname{Re} z<0$ respectivamente. Si $\operatorname{Re} z=0$, el sumando que antecede al paréntesis puede ser omitido.

785. Halle el desarrollo asintótico de la función

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{e^{zt}\sqrt{z}\,dz}{z^2+\omega^2} \quad (\omega>0).$$

Halle también el desarrollo de $f(t)$ para pequeños valores de t.

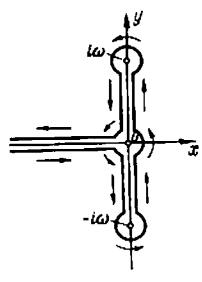


FIG. 28

Sugerencia. Sustituya C_1 por el contorno indicado en la fig. 28. Para obtener el desarrollo asintótico de la integral $\int_0^\infty \frac{e^{-xt}\sqrt{x}\,dx}{x^2+\omega^2}$ haga uso de la sugerencia al problema 779. Para valores pequeños de t es necesario escoger C_1 de manera que α sea mayor que ω y desarrollar $\frac{1}{z^2+\omega^2}$ en serie.

786. Demuestre que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{e^{zt}}{\sqrt{z}\,(z^2+1)}\,dz - \operatorname{sen}\left(t-\frac{\pi}{4}\right) \sim \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^\infty (-1)^n\frac{(4n)!}{(2n)!}\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)^{4n+1}.$$

787. Halle el desarrollo asintótico de la función

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1}\frac{e^{zt}\,dz}{z\left(1+z^{\frac{3}{2}}\right)}\quad (z^{3/2}>0 \text{ para } z>0).$$

Obtenga también la fórmula de aproximación de $f(t)$ para pequeños valores de t.

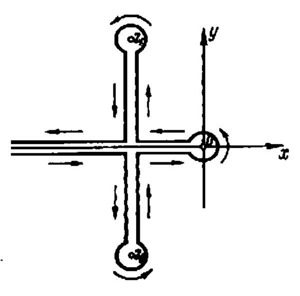


FIG. 29

Sugerencia. Para obtener el desarrollo asintótico, sustituya C_1 por el contorno indicado en la fig. 29, donde $z_1=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$ y $z_2=-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}$. Para valores pequeños de t es necesario escoger la abscisa de la recta C_1 mayor que la unidad.

§ 5. DISTRIBUCION DE CEROS. INVERSION DE SERIES

TEOREMA DE ROUCHE

En los problemas **788—790** halle, empleando el teorema de Rouché, el número de raíces de las ecuaciones dadas pertenecientes al círculo $|z|<1$.

788. $z^9-2z^6+z^2-8z-2=0$.

789. $2z^5-z^3+3z^2-z+8=0$. **790.** $z^7-5z^4+z^2-2=0$.

791. Demuestre que, si en todos los puntos de un contorno C es válida la desigualdad

$$|a_kz^k|>|a_0+a_1z+\ldots+a_{k-1}z^{k-1}+a_{k+1}z^{k-1}+\ldots+a_nz^n|,$$

el polinomio $a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n$ tiene k ceros en el interior del contorno C, si el punto $z=0$ se encuentra dentro de este contorno, y no tiene ceros, si este punto se halla fuera del contorno C.

792. ¿Cuántas raíces de la ecuación $z^4-5z+1=0$ se hallan en el círculo $|z|<1$? ¿en el anillo $1<|z|<2$?

793. ¿Cuántas raíces de la ecuación $z^4-8z+10=0$ se hallan en el círculo $|z|<1$? ¿en el anillo $1<|z|<3$?

794. ¿Cuántas raíces tiene en el círculo $|z|<1$ la ecuación

$$z^n+\alpha_0 z^2+\alpha_1 z+\alpha_2=0,$$

siendo $|\alpha_0|>|\alpha_1|+|\alpha_2|+1$ (n es un número natural)?

795. ¿Cuántas raíces tiene en el círculo $|z|<1$ la ecuación $z=\varphi(z)$, si para $|z|\leqslant 1$ la función $\varphi(z)$ es analítica y verifica la desigualdad $|\varphi(z)|<1$?

796. ¿Cuántas raíces tiene en el círculo $|z|<1$ la ecuación

$$e^z-4z^n+1=0 \text{ (} n \text{ es un número natural)?}$$

797. ¿Cuántas raíces tiene en el círculo $|z|<R$ la ecuación $e^z=az^n$ (n es un número natural), siendo $|a|>e^R/R^n$?

798. Demuestre que la ecuación $z=\lambda-e^{-z}$ $(\lambda>1)$ tiene en el semiplano de la derecha una raíz única (y además real).

799*. Demuestre que para $\rho>0$ tan pequeño como se quiera todos los ceros de la función,

$$f_n(z)=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\ldots+\frac{1}{n!z^n}$$

pertenecerán para n suficientemente grande al círculo $|z|<\rho$.

800. Demuestre que para $\rho<1$ el polinomio

$$P_n(z)=1+2z+3z^2+\ldots+nz^{n-1}$$

no tiene ceros en el círculo $|z|<\rho$ siendo n suficientemente grande.

Sugerencia. Haga uso del método de la solución del problema **799.**

PRINCIPIO DEL ARGUMENTO

801. La función $\varphi(z)$ es meromorfa en el recinto G y analítica en su frontera C. Demuestre las proposiciones siguientes:

1) Si $|\varphi(z)|<1$ sobre C, el número de raíces de la ecuación $\varphi(z)=1$, pertenecientes al recinto G, es igual al número de polos de la función $\varphi(z)$ en el recinto G.

2) Si $|\varphi|(z)>1$ sobre C, el número de raíces de la ecuación $\varphi(z)=1$, pertenecientes al recinto G, es igual al número de ceros de la función $\varphi(z)$ en el recinto G.

3) Las proposiciones 1) y 2) siguen siendo válidas, si la ecuación $\varphi(z)=1$ se sustituye por la ecuación $\varphi(z)=\alpha$, donde $|\alpha|\geqslant 1$ en el caso 1) y $|\alpha|\leqslant 1$ en el caso 2).

802. Sea

$$P_n(z)=z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n$$

un polinomio que no tiene ceros en el eje imaginario.

Demuestre que el punto z recorre el eje imaginario desde arriba hacia abajo, el incremento del argumento de $P_n(z)$ es igual a $k\pi$, donde k es un número entero de la misma paridad que n y $|k| \leqslant n$.

Demuestre que en estas condiciones el polinomio $P_n(z)$ tiene en el semiplano de la derecha $(n+k)/2$ ceros.

Sugerencia. Represente $P_n(z)$ en la forma

$$P_n(z) = z^n\left(1+\frac{a_1}{z}+\ldots+\frac{a_n}{z^n}\right)$$

y aplique el principio del argumento al semicírculo $|z| < R$, $\operatorname{Re} z > 0$ para R suficientemente grande.

803. Halle el número de raíces del polinomio

$$z^6+z^5+6z^4+5z^3+8z^2+4z+1$$

en el semiplano de la derecha.

804. Halle el número de raíces de la ecuación

$$z^4+2z^3+3z^2+z+2=0$$

en el semiplano de la derecha y en el primer cuadrante.

805. ¿Cuántas raices tiene en cada cuadrante la ecuación

$$2z^4-3z^3+3z^2-z+1=0?$$

806. ¿En qué cuadrantes se hallan las raíces de la ecuación

$$z^4+z^3+4z^2+2z+3=0?$$

807. Demuestre que el número de raíces de la ecuación

$$z^{2n}+\alpha z^{2n-1}+\beta^2=0$$

(α y β son números reales, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$; n es un número natural) de parte real positiva es igual a n, si n es par. En cambio, si n es impar este número es igual a $n-1$ para $\alpha>0$ y a $n+1$ para $\alpha<0$.

Sugerencia. Considere el incremento de $\arg(z^{2n}+\alpha z^{2n-1}+\beta^2)$ cuando el punto z describe la frontera del semicírculo de la derecha de un radio grande.

Cuando los coeficientes del polinomio

$$P_n(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1}z + a_n$$

dependen continuamente de parámetros reales α y β, conviene, para determinar la relación entre los parámetros y el número de ceros de $P_n(z)$ pertenecientes al semiplano de la derecha, proceder del modo siguiente (partiendo del hecho de que todo cero depende continuamente de los coeficientes del polinomio):

Construir en el plano α, β las curvas $P_n(i\tau)=0$ (τ es un parámetro real), es decir, las curvas para los puntos de las cuales entre las raices del polinomio hay raíces imaginarias puras (o cero). Estas curvas dividen el plano α, β en *recintos en cada uno de los cuales el número de ceros de $P_n(z)$ de parte real* positivo es constante. Este número se puede hallar tomando un punto arbitrario del recinto correspondiente y aplicando a él, por ejemplo, el método del problema 802.

En los problemas **808—810** determine los recintos del plano α, β, en los que es constante el número de raíces de parte real positiva del polinomio correspondiente $P(z)$; halle este número m para cada uno de los recintos.

808. $P(z)=z^3+\alpha z^2+\alpha z+\beta$. **809.** $P(z)=z^3+\alpha z^2+\beta z+1$.

810. $P(z)=z^3+(\alpha+\beta)z^2+(\alpha-\beta)z+\alpha$.

811. Sea $f(z)=P_n(z)+Q_m(z)e^{-z\tau}$, donde $\tau>0$; $P_n(z)$ y $Q_m(z)$ son polinomios primos entre sí, con la particularidad de que $n>m$, y $f(z)$ no tiene ceros sobre el eje imaginario. Sea N el número de ceros del polinomio $P_n(z)$ en el semiplano de la derecha. Demuestre que, para que la función $f(z)$ no tenga ceros en el semiplano de la derecha, es necesario y suficiente que el punto $w=-\frac{Q_m(z)}{P_n(z)}e^{-\tau z}$ envuelva en la dirección positiva N veces el punto $w=1$ cuando el punto z recorra todo el eje imaginario desde abajo hacia arriba (si $P_m(z)$ tiene ceros sobre el eje imaginario, es preciso al desplazar el punto z por este eje, contornar los ceros de $P_n(z)$ por la derecha a lo largo de unas semicircunferencias de radios suficientemente pequeños).

En los problemas **812—814** halle, empleando el teorema del problema **811**, en el espacio de los coeficientes a, b (es decir, en el plano a, b) los recintos para los cuales todos los ceros de las funciones correspondientes pertenecen al semiplano de la izquierda, suponiendo que $\tau>0$ y que a y b son números reales.

812. $z+a+be^{-\tau z}$. **813.** $z^2+az+be^{-\tau z}$.

814. $z^2+(az+b)e^{-\tau z}$.

---

815. Demuestre, empleando el teorema de Rouché, que si para la función $w=f(z)$ tiene lugar el desarrollo

$$f(z)=w_0+c_k(z-z_0)^k+\ldots \quad (c_k\neq 0,\ k\geqslant 1)$$

en una vecindad del punto z_0, entonces para $r>0$ suficientemente pequeño existe un $\rho>0$ tal que cualquier valor $w\neq w_0$ del círculo $|w-w_0|<\rho$ se alcanza exactamente k veces en el círculo $|z-z_0|<r$ y, además, en puntos diferentes.

816. Demuestre, empleando el resultado del problema anterior, que una función analítica posee la propiedad de conservar los recintos.

817. Demuestre, empleando el resultado del problema anterior, el principio de módulo máximo para una función analítica. Demuestre que este principio es válido para cualesquiera transformaciones continuas $w=f(z)$ que conservan los recintos.

818. Demuestre que, si en las condiciones del problema **815** $k=1$, es decir, si $f'(z_0)\neq 0$, la función $f(z)$ establece una correspondencia

conforme y biunívoca entre una vecindad simplemente conexa del punto z_0 y el círculo $|w-w_0|<\rho$.

Sugerencia. Considere la función $z=f^{-1}(w)$ en el círculo $|w-w_0|<\rho$.

819. Demuestre que, si en las condiciones del problema **815** $k>1$, la función $w=f(z)$ transforma biunívocamente una vecindad simplemente conexa del punto z_0 en un círculo k-valente de centro en el punto w_0.

820. Extienda los teoremas demostrados en los problemas **818** y **819** al caso en que el punto z_0 es un polo simple o múltiple de la función $f(z)$.

821. Demuestre que, si el desarrollo de la función $f(z)$ en una vecindad del punto infinito es de la forma

$$f(z)=A_0+\frac{A_1}{z}+\frac{A_2}{z^2}+\ldots+\frac{A_k}{A^k}\ldots,$$

existe una vecindad del punto infinito que puede ser conforme y biunívocamente transformada en un círculo univalente, si $A_1\neq 0$, y k-valente, si $A_1=A_2=\ldots=A_{k-1}=0$ y $A_k\neq 0$.

INVERSIÓN EN SERIES

822. Sea $F(z)=z-a-wf(z)$ y sea $f(z)$ analítica en el punto $z=a$. Demuestre, empleando el teorema de Rouché, que para $|w|$ suficientemente pequeño existe un círculo K de centro en el punto $z=a$ en el cual la función $F(z)$ tiene sólo un cero (simple). Pruebe también que, siendo $f(a)\neq 0$, cualquier punto de una vecindad del punto $z=a$ puede ser un cero de la función $F(z)$, si se escoge convenientemente el valor de w.

823. Sea $z=z(w)$ una función uniforme definida para valores suficientemente pequeños de $|w|$ mediante la ecuación $z-a-wf(z)=0$, donde $f(z)$ es analítica en el punto $z=a$ y $f(a)\neq 0$. Demuestre que para $|w|$ suficientemente pequeño y para toda función $\Phi(z)$ analítica en el punto $z=a$ tiene lugar el desarrollo

$$\frac{\Phi(z)}{1-wf'(z)}=\Phi(a)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{w^n}{n!}\frac{d^n}{da^n}\{\Phi(a)[f(a)]^n\}.$$

Sugerencia. Si C es la circunferencia del círculo k en el que la ecuación $z-a-wf(z)=0$ tiene solamente una raíz (véase el problema 822), tendremos

$$\frac{\Phi(z)}{1-wf'(z)}=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\Phi(\zeta)}{\zeta-a-wf(\zeta)}d\zeta.$$

Desarrolle ahora el integrando en serie respecto a las potencias de w y estime el resto

824. Demuestre, empleando las denotaciones del problema anterior, la fórmula de Lagrange $\Phi(z)=\Phi(a)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{w^n}{n!}\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}\{\Phi'(a)[f(a)]^n\}$.

Deduzca de ella, en particular, el desarrollo en serie de Taylor para la propia función $z = z(w)$.

Sugerencia. Aplique la solución del problema anterior a la función $\Phi(z)[1 - wf'(z)]$.

825. Desarrolle en serie respecto a las potencias de w cada una de las ramas de la función $z(w)$ definida por la ecuación $w = 2z + z^2$ (para una de las ramas $z(0) = 0$ y para la otra $z(0) = -2$).

826. Desarrolle en serie de potencias de w la rama de la función $z = z(w)$, definida por la ecuación $w = 2\frac{z-a}{z^2-1}$, para la cual $z(0) = a$.

827. Partiendo de la definición de los polinomios de Legendre $P_n(z)$ a través de la función generadora $\frac{1}{\sqrt{1-2zt+t^2}}$ (véase el problema 492), demuestre que $P_n(z) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dz^n}[(z^2-1)^n]$.

Sugerencia. En las condiciones del problema 826, aplique la fórmula de Lagrange a la función $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{1-2aw+w^2}} = \frac{1-z^2}{z^2-2az+1}$.

828. La función $z = z(w)$ se define en una vecindad del punto $w = 0$ mediante la igualdad $w = ze^{-az}$. Desarrolle en serie de potencias de w:

1) $z(w)$; 2) $e^{bz(w)}$.

829. Desarrolle en potencias de w la función $z = z(w)$ definida en una vecindad del punto $w = 0$ mediante la ecuación de Kepler

$$z - a = w \operatorname{sen} z \quad (a \neq 0, \ \pm\pi, \ \pm 2\pi, \ \ldots).$$

830*. Determine el radio de convergencia del desarrollo de $z(w)$ obtenido en el problema anterior para el caso en que $a = \pi/2$.

831. Demuestre la siguiente generalización del teorema de Lagrange. Sean $f(z)$ y $\varphi(z)$ funciones analíticas en una vecindad del punto a y sea C una circunferencia de radio r y de centro en el punto a tal que en todos sus puntos

$$|\alpha f(z) + \beta\varphi(z)| < r.$$

Si $\Phi(\zeta)$ es una función analítica de la única raíz de la ecuacíon $z - a - \alpha f(z) - \beta\varphi(z) = 0$, se tiene

$$\Phi(\zeta) = \Phi(a) + \sum \frac{\alpha^m\beta^n}{m!\,n!}\frac{d^{m+n-1}}{da^{m+n-1}}\{\Phi'(a)[f(a)]^m\{\varphi(a)\}^n\},$$

donde la suma se extiende a todos los valores de m y de n, a excepción de $m = n = 0$.

CAPITULO V

DISTINTAS SERIES DE FUNCIONES INTEGRALES PARAMETRICAS

§ 1. SERIES DE FUNCIONES

En los problemas 832—841 halle los recintos de convergencia de las series indicadas.

832. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(z^n+\frac{1}{2^nz^n}\right)$. **833.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^n}{n!}+\frac{n^2}{z^n}\right)$. **834.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{z(z+n)}{n}\right]^n$.

835. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{z\ln n}$. **836.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} nz}{n}$. **837.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z+n}$. **838.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{2^n}+1}$.

839. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{1-z^n}$. **840.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{1+z^{2n}}$. **841.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{(4+z)(4+z^2)\ldots(4+z^n)}$.

842*. Demuestre que siendo la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ convergente, la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_nz^n}{1-z^n}$ converge siempre que $|z|\neq 1$; en cambio, si la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ diverge, la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_nz^n}{1-z^n}$ converge en el círculo de convergencia de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nz^n$ y diverge fuera de este círculo.

843. 1) Desarrolle en serie de potencias de z la suma de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_nz^n}{1-z^n}$; halle el radio de convergencia de la serie obtenida.

2) Demuestre que $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n) \frac{z^n}{1-z^n} = \frac{z}{(1-z)^2}$ para $|z| < 1$, donde $\varphi(n)$ el la cantidad de los números naturales menores que n y coprimos de n.

Sugerencia. Haga uso de la conocida relación de la teoría de los números según la cual $\sum \varphi(n) = m$, donde n recorre los valores de todos los divisores de m, incluyendo 1 y m.

844. Desarrolle la función $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-z \ln n}$ (Zeta es la función de Riemann) en serie de Taylor en una vecindad del punto $z = 2$ y halle su radio de convergencia.

En los problemas **845—848** halle la suma de las series dadas ($|z| \neq 1$).

845. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+z^n} - \frac{1}{1+z^{n-1}} \right)$.

846. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(1-z^n)(1-z^{n+1})}$.

Sugerencia. Multiplique el numerador y el denominador por $(1-z)$.

847. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2^n}}{\prod_{k=0}^{n} (1+z^{2^k})}$. 848. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2^{n-1}}}{z^{2^n}-1}$.

849. Demuestre las proposiciones:

1) Para que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converja uniformemente en el conjunto E es necesario y suficiente que para todo $\varepsilon > 0$ exista un número $N = N(\varepsilon)$ tal que para todo $n > N$, todo $z \in E$ y cualquier número natural p se cumpla la desigualdad $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(z) \right| < \varepsilon$.

2) La convergencia uniforme de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)|$ en el conjunto E implica la convergencia uniforme de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ en este mismo conjunto.

850. Halle los conjuntos en los que convergen uniformemente las sucesiones dadas:

1) $\left\{ \frac{1}{1+z^n} \right\}$; 2) $\left\{ \frac{z^n}{1+z^{2n}} \right\}$; 3) $\left\{ \frac{\operatorname{sen} nz}{n} \right\}$.

851. Demuestre:

Para que una sucesión $\{f_n(z)\}$ de funciones continuas converja uniformemente en un conjunto cerrado y acotado E, es necesario y suficiente que esta sucesión converja en todos los puntos de este conjunto y que converja continuamente en todos los puntos de acumulación del conjunto E, esto es, que cualquiera que sea la sucesión de puntos z_n pertenecientes al conjunto E y convergentes hacia el punto z_0, se tenga

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z_n) = f(z_0).$$

En los problemas 852—856 halle los conjuntos en los que convergen uniformemente las series dadas.

852. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right)$. **853.** $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nz}$.

854. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-z \ln n}$. **855.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nz}{n^2}$. **856.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nz}{n}$.

857. Demuestre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ converge uniformemente en el círculo cerrado $|z| \leqslant 1$. ¿Convergerá uniformemente en el círculo $|z| < 1$ la serie obtenida mediante su derivación término por término?

858. Demuestre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{z+n}$ converge uniformemente en toda parte finita del plano de la cual se han excluido círculos de centros en los puntos $z = 0, -1, -2, \ldots$ y de un radio ρ tan pequeño como se quiera.

Demuestre también que esta serie no converge absolutamente en ningún punto.

859. Demuestre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ converge uniformemente en el intervalo $(-1, 0)$, mientras que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{z^n}{n}\right|$ converge en este mismo intervalo pero no uniformemente. (Por consiguiente, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ no puede ser mayorizada en el intervalo $(-1, 0)$ mediante una serie numérica convergente).

Observación. Este ejemplo prueba que el criterio *suficiente* de convergencia uniforme de Weierstrass no es *necesario*.

860. 1) La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z}{(1+z^2)^n}$ converge absolutamente para $|z| \geqslant 0$ y $|\arg z| \leqslant \pi/4$ (estos valores de z no agotan todo el recinto de convergencia absoluta que, como puede verse fácilmente, se compone del punto $z=0$ y del exterior de la lemniscata $|1+z^2|=1$). Demuestre que en el recinto indicado la serie converge no uniformemente.

Observación. Esto prueba que incluso la convergencia absoluta de una serie en un recinto cerrado no implica la convergencia uniforme.

2) Demuestre que en este mismo recinto la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z}{(1+z^2)^n}$ converge uniforme y absolutamente, pero no absolutamente uniforme (es decir, la serie compuesta por los módulos no converge uniformemente).

861. Demuestre que, si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)|$ converge uniformemente en todo recinto cerrado, interior de un recinto G, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n'(z)|$ posee la misma propiedad.

§ 2. SERIES DE DIRICHLET[1]

La serie de tipo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$, donde a_n son coeficientes complejos y λ_n son números positivos tales que

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots \text{ y } \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty,$$

se denomina *serie de Dirichlet* de exponentes positivas.

862. Demuestre que, si la serie de Dirichlet converge en el punto $z_0 = x_0 + iy_0$, también converge en todo punto del semiplano $\operatorname{Re} z > \operatorname{Re} z_0$, siendo además esta convergencia uniforme en todo ángulo $|\arg(z - z_0)| \leqslant \theta < \pi/2$.

Sugerencia. Aplique la transformación de Abel a la suma

$$\sum_{n=p}^{q} a_n e^{-\lambda_n z} = \sum_{n=p}^{q} a_n e^{-\lambda_n z_0}\, e^{-\lambda_n (z - z_0)}$$

y haga uso de la desigualdad ($a < b$, $z = x + iy$)

$$|e^{-az} - e^{-bz}| = \left| z \int_a^b e^{-zt}\, dt \right| \leqslant \frac{|z|}{x} (e^{-ax} - e^{-bx}).$$

[1] En relación con el ciclo de problemas que se ofrece véase, por ejemplo, [1, cap. IV, § 2, nº 2].

863. Demuestre que, si la serie de Dirichlet converge absolutamente en un punto $z=z_0$, también converge absoluta y uniformemente en el *semiplano* $\operatorname{Re} z \geqslant \operatorname{Re} z_0$.

De los teoremas enunciados en los problemas **862** y **863** se deduce que el recinto de convergencia de la serie de Dirichlet (si es que existe) es un semiplano $\operatorname{Re} z > x_c$ $(x_c \geqslant -\infty)$, mientras que el recinto de convergencia absoluta (si es que existe) es un semiplano $\operatorname{Re} z > x_a$ $(x_a \geqslant -\infty)$, con la particularidad de que la serie o bien converge absolutamente en toda la recta $\operatorname{Re} z = x_a$ o bien *no converge absolutamente en ningún punto de esta recta*. Los números x_c y x_a se llaman respectivamente *abscisa de convergencia y abscisa de convergencia absoluta* de la serie de Dirichlet.

En los problemas **864—870** halle la abscisa de convergencia (x_c) y la abscisa de convergencia absoluta (x_a) de las series dadas.

864. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{-n^2} e^{-zn^2}$. **865.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-z \ln \ln n}$.

866. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} e^{-z \ln \ln n}$.

867. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n e^{-z \ln \ln n}$. **868.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-z \ln n}$.

869. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-z \ln n}$. **870.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{e^n} e^{-zn^2}$.

871. Demuestre que siendo $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\ln n}{\lambda_n} = 0$, se tiene

$$x_c = x_a = \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\ln |a_n|}{\lambda_n}.$$

872. Demuestre que siendo $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \frac{\ln n}{\lambda_n} = l$, se tiene $x_a - x_c \leqslant l$.

En los problemas **873—877** analice la convergencia de la serie de Dirichlet en la frontera del semiplano de convergencia.

873. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-z \ln n}$. **874.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} e^{-z \ln n}$.

875. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-zn}$. **876.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} e^{-zn}$.

877. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n} e^{-zn}$.

Sugerencia. Véase el problema **449**.

En los problemas **878** y **879** se consideran series de Dirichlet de exponentes complejos.

878. Supongamos que los números λ_n verifican las condiciones

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\lambda_n}=0 \quad \text{y} \quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln|a_n|}{|\lambda_n|}=k<\infty.$$

Demuestre que para $\alpha\leqslant\arg\lambda_n\leqslant\beta$ la serie de Dirichlet converge absolutamente en todo punto $z=x+iy$, para el cual se cumple la desigualdad $x\cos\varphi-y\operatorname{sen}\varphi-k>0$ cualquiera que sea φ de $[\alpha, \beta]$ y diverge en todo punto tal que para todo φ de $[\alpha, \beta]$

$$x\cos\varphi-y\operatorname{sen}\varphi-k<0.$$

879. Sea dada una serie arbitraria de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty}a_ne^{-\lambda_nz}$. Sea $k(\varphi, \alpha)=\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{\ln|a_{n_k}|}{|\lambda_{n_k}|}$ y $k(\varphi)=\lim_{\alpha\to 0}k(\varphi, \alpha)$, donde $\{n_k\}$ es la sucesión de todos los índices para los cuales $\varphi-\alpha\leqslant\arg\lambda_{n_k}\leqslant\varphi+\alpha$ (si no existe una subsucesión $\{n_m\}$ tal que $\lim_{m\to\infty}\arg\lambda_{n_m}=\varphi$, debe tomarse $k(\varphi)=-\infty$).

Demuestre que siendo $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\lambda_n}=0$, la serie converge absolutamente en el interior del recinto G cuyos puntos $z=x+iy$ verifican para todo φ la condición $x\cos\varphi-y\operatorname{sen}\varphi-k(\varphi)>0$ y diverge en todo punto que se encuentra fuera de G.

§ 3. INTEGRALES PARAMÉTRICAS

CONVERGENCIA DE INTEGRALES

880. Demuestre el teorema:

Sea C un contorno simple (cerrado o no cerrado) de longitud finita y sea $f(\tau, z)$ una función analítica respecto a la variable z y continua respecto a τ para todo z de un recinto D y para todo punto τ perteneciente al contorno C. En estas condiciones, la función representada por la integral $F(z)=\int_C f(\tau, z)\,d\tau$ es una función analítica de la variable z y

$$F'(z)=\int_C f'_z(\tau, z)\,d\tau.$$

Si la integral $\int_C f(\tau, z)\,d\tau$ es impropia, es decir, si el integrando es discontinuo para algunos valores aislados $\tau\in C$ o el contorno de integración contiene el punto infinito, la definición de convergencia y de convergencia uniforme de tal integral es completamente análoga a las definiciones correspondientes que se dan en el curso de análisis matemático.

881. Demuestre que para la convergencia uniforme de la integral $\int_C f(\tau, z)\,d\tau$ en un conjunto E respecto a un punto $\tau_0 \neq \infty$ del contorno C es necesario y suficiente que cualquiera que sea $\varepsilon > 0$ exista un número $\delta(\varepsilon)$ tal que

$$\left|\int_{C_\sigma} f(\tau, z)\,d\tau\right| < \varepsilon$$

para todo punto z del conjunto E y para todo arco C_σ del contorno C que pertenezca a una δ—vecindad del punto τ_0 y que no contenga este punto ni en su interior ni en sus extremos.

882. Enuncie y demuestre un criterio análogo de convergencia uniforme de la integral en el caso en que $\tau_0 = \infty$. Considere los casos en los que el *contorno C no es acotado en una o en ambas* direcciones.

883. Demuestre que la integral $\int_C f(\tau, z)\,d\tau$ converge uniformemente en un conjunto E si $|f(\tau, z)| \leqslant |\psi(\tau)|$ para todo punto z del conjunto E y si $\int_C |\psi(\tau)|\,d\tau$ converge.

884. Sea $f(\tau, z)$ una función analítica respecto a z y continua respecto a τ para todo punto z perteneciente a un recinto D y para los puntos τ pertencienetes a un contorno C, salvo algunos puntos aislados del último, donde las condiciones requeridas de la función $f(\tau, z)$ se alteran o bien para todos los puntos z o bien para algunos de ellos.

Demuestre que, si la integral impropia

$$F(z) = \int_C f(\tau, z)\,d\tau$$

converge uniformemente en *el interior* del recinto D (es decir, en todo subrecinto cerrado del recinto D), la función $F(z)$ es analítica y

$$F'(z) = \int_C \frac{\partial f}{\partial z}\,d\tau,$$

siendo la última integral uniformemente convergente en el interior de D.

En los problemas 885—892 halle los conjuntos en los que convergen uniformemente las integrales indicadas.

885. $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt$ $(t^{z-1} = e^{(z-1)\ln t})$. **886.** $\int_0^\infty e^{-zt^2}\,dt$.

887. $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} t}{t^z}\,dt$. **888.** $\int_0^\infty \frac{\cos t}{t^z}\,dt$. **889.** $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} tz}{t}\,dt$.

890. $\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{zt}}{t}\,dt\ (c \neq 0)$. **891.** $\int_{c}^{c+i\infty} \frac{e^{zt}}{t}\,dt\ (c \neq 0)$.

892. $\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{z^t}{t}\,dt \quad (c \neq 0,\ z^t = e^{t \ln z})$.

INTEGRAL DE LAPLACE

La integral de tipo

$$\int_0^\infty e^{-tz} f(t)\,dt, \tag{1}$$

donde la función $f(t)$ es integrable en el segmento $[0, a]$ para cualquier positivo $a < \infty$, se llama *integral de Laplace*.

893. Demuestre las proposiciones siguientes:

1) Si la integral (1) converge en el punto $z = z_0$, converge en el semiplano $\operatorname{Re} z > \operatorname{Re} z_0$, siendo la convergencia uniforme en el ángulo $|\arg(z - z_0)| \leqslant \theta < \pi/2$.

2) Si la integral (1) converge absolutamente para $z = z_0$, converge absoluta y uniformemente en el semiplano $\operatorname{Re} z \geqslant \operatorname{Re} z_0$.

3) Si $\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\ln|f(t)|}{t} = \beta$, la integral (1) converge absolutamente en el semiplano $\operatorname{Re} z > \beta$ y uniformemente en todo semiplano $\operatorname{Re} z \geqslant \beta + \varepsilon\ (\varepsilon > 0)$ (construya un ejemplo de una integral de Laplace que sea absolutamente convergente en todo el plano y para la cual $\beta = \infty$).

4) Si $\underline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\ln|f(t)|}{t} = \alpha$, la integral (1) no converge absolutamente en ningún punto del semiplano $\operatorname{Re} z < \alpha$.

De los teoremas, enunciados en el problema **893**, se deduce que los recintos de convergencia y de convergencia absoluta de la integral de Laplace (si es que estos recintos existen) son unos semiplanos $\operatorname{Re} z > x_c$ y $\operatorname{Re} z > x_a$; el número x_c se llama *abscisa de convergencia* y x_a se llama *abscisa de convergencia absoluta* de la integral de Laplace.

En los problemas **894—900** halle x_c y x_a para la integral $\int_0^\infty e^{-zt} f(t)\,dt$, donde $f(t)$ es la función dada.

894. $f(t) = 1$. **895.** $f(t) = e^{-t^2}$. **896.** $f(t) = e^{t^2}$.

897. $f(t) = \begin{cases} e^{-t^2} \text{ para } 0 \leqslant t < \ln\ln 3 \text{ y} \\ \qquad \ln\ln 2k \leqslant t < \ln\ln(2k+1)\ (k = 2, 3, \ldots) \\ -e^{-t^2} \text{ para } \ln\ln(2k+1) \leqslant t < \ln\ln(2k+2) \\ \qquad (k = 1, 2, \ldots). \end{cases}$

898. $f(t)=\begin{cases} e^{\frac{1}{2}e^t} \text{ para } 0\leqslant t<\ln\ln 3 \text{ y } \ln\ln 2k\leqslant t< \\ <\ln\ln(2k+1) \ (k=2,\ 3,\ \ldots) \\ -e^{\frac{1}{2}e^t} \text{ para } \ln\ln(2k+1)\leqslant t<\ln\ln(2k+2) \\ (k=1,\ 2,\ \ldots). \end{cases}$

899. $f(t)=\begin{cases} e^{e^t} \text{ para } 0\leqslant t<\ln\ln 3 \text{ y } \ln\ln 2k\leqslant t< \\ <\ln\ln(2k+1) \ (k=2,\ 3,\ \ldots). \\ -e^{e^t} \text{ para } \ln\ln(2k+1)\leqslant t<\ln\ln(2k+2) \\ (k=1,\ 2,\ \ldots). \end{cases}$

900. $f(t)=\begin{cases} e^t \text{ para } \ln(2k-1)\leqslant t<\ln 2k \quad (k=1,\ 2,\ \ldots) \\ -e^t \text{ para } \ln 2k\leqslant t<\ln(2k+1) \quad (k=1,\ 2,\ \ldots). \end{cases}$

En los problemas **901—904** analice la convergencia de las integrales de Laplace $\int_0^\infty e^{-zt}f(t)\,dt$ en la frontera del semiplano de convergencia.

901. $f(t)=1$. **902.** $f(t)=0$ para $0\leqslant t\leqslant 1$, $f(t)=1/t^2$ para $t>1$.

903. $f(t)=0$ para $0\leqslant t\leqslant 1$, $f(t)=1/t$ para $t>1$.

904. $f(t)=0$ para $t=0$, $f(t)=1$ para $0<t\leqslant 1$ y para $t>1$ $f(t)$ se define del modo siguiente:

$$f(t+1)=\begin{cases} f(t)+1, \text{ si } (2k-1)^2<t+1\leqslant(2k)^2 \\ f(t)-1, \text{ si } (2k)^2<t+1\leqslant(2k+1)^2 \quad (k=1,\ 2,\ \ldots). \end{cases}$$

CAPITULO IV

PRODUCTOS INFINITOS. FUNCIONES ENTERAS Y MEROMORFAS

§ 1. PRODUCTOS INFINITOS

En los problemas 905—911 demuestre las igualdades dadas.

905. $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}$. **906.** $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)=2$.

907. $\prod_{n=3}^{\infty}\frac{n^2-4}{n^2-1}=\frac{1}{4}$. **908.** $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right)=\frac{1}{3}$.

909. $\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1}=\frac{2}{3}$. **910.** $\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right]=1$.

911. $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{e^{1/n}}{1+\frac{1}{n}}=e^C$, donde $C=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)$ es la constante de Euler.

912. Demuestre que $\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\alpha}{2^n}=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}$.

Sugerencia. Demuestre primero la identidad

$$\operatorname{sen}\varphi=2^k\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2^k}\prod_{n=1}^{k}\cos\frac{\varphi}{2^n}.$$

913. Usando la solución del problema **912** demuestre que

$$\frac{2}{\sqrt{2}}\,\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\,\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\cdots=\frac{\pi}{2}.$$

914*. Demuestre la fórmula de Wallis $\frac{\pi}{2}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{2n-1}\,\frac{2n}{2n+1}\right)$.

915. Demuestre que, tomando como de costumbre $-\pi < \arg p_n \leqslant \pi$, el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ converge y diverge a la vez que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$.

916. Examine si sigue siendo válida la afirmación del problema anterior cuando se conviene en que

1) $0 \leqslant \arg p_n < 2\pi$;
2) $\alpha < \arg p_n \leqslant \alpha + 2\pi \, (-2\pi < \alpha < 0)$.

917. Demuestre que para la convergencia absoluta del producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} (1+a_n)$ (es decir, para la convergencia absoluta de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+a_n)$ es necesario y suficiente que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converja absolutamente.

918. Los productos $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ y $\prod_{n=1}^{\infty} q_n$ convergen. Analice la convergencia de los productos:

1) $\prod_{n=1}^{\infty} (p_n+q_n)$; 2) $\prod_{n=1}^{\infty} (p_n-q_n)$; 3) $\prod_{n=1}^{\infty} p_n q_n$; 4) $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{q_n}$.

En los problemas **919—923** investigue la convergencia y la convergencia absoluta de los productos dados.

919. $\prod_{n=1}^{\infty} \left[1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right]$. **920.** $\prod_{n=1}^{\infty} n^{(-1)^n}$.

921. $\prod_{n=1}^{\infty} \left[1+\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}\right] (p>0)$. **922.** $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n^p}\right) (p>0)$.

923. $\prod_{n=1}^{\infty} \cos z_n$, si se sabe que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^2$ converge.

---

924. Demuestre que en el interior del círculo unidad

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1+z^{2^n}) = \frac{1}{1-z},$$

con la particularidad de que el producto converge absolutamente.

En los problemas **925—933** halle el recinto de convergencia de los productos.

925. $\prod_{n=1}^{\infty} (1-z^n)$. **926.** $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{z^n}{2^n}\right)$. **927.** $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$.

928. $\prod_{n=2}^{\infty} \left[1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} z^{-n}\right]$. **929.** $\prod_{n=1}^{\infty} \left[1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n\right]$.

930. $\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{z}{n}$. 931. $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{z}{n}}{\frac{z}{n}}$. 932. $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}$.

933. $\prod_{n=1}^{\infty} (1+c_n z)$, si se sabe que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ converge.

---

934. Demuestre que el producto

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left[1+\frac{(-1)^{n+1}}{n^z}\right] \quad (n^z := e^{z \ln n})$$

converge en el semiplano $\operatorname{Re} z > 1/2$ y converge absolutamente en el semiplano $\operatorname{Re} z > 1$.

935. Sea $\{f_n(z)\}$ una sucesión de funciones analíticas en un recinto G, con la particularidad de que todas estas funciones, a excepción de un número finito de ellas, no se anulan en el recinto G. Demuestre que la función $F(z)=\prod_{n=1}^{\infty} [1+f_n(z)]$ es analítica en el recinto G, si $|f_n(z)| \leqslant \alpha_n$ para todo $z \in G$, donde α_n no depende de z, y si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ converge.

En los problemas **936—939** se establecen algunas de las propiedades de la función Gamma que se desprenden de su definicion como límite de un producto infinito (véase, por ejemplo, [1, cap. VII, § 4] o [2, cap. VII, § 1]).

936. Demuestre que el producto

$$\Gamma(z+1)=\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n}{z+n} \left(\frac{n+1}{n}\right)^z \quad \left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^z = e^{z \ln \frac{n+1}{n}}\right)$$

converge absolutamente en todo el plano, a excepción de los valores de z iguales a los números enteros negativos, y representa una función analítica en todo el plano, salvo los puntos $z=-1, -2, \ldots$

937. Demuestre la fórmula de Euler

$$\Gamma(z)=\lim_{n \to \infty} \frac{n!\, n^z}{z(z+1)(z+2)\ldots(z+n)} \quad (n^z = e^{z \ln n})$$

y pruebe que:

1) $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$;

2) $\Gamma(m+1)=m!$, donde m es un número natural.

938. Demuestre que

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n(\alpha+\beta+n)}{(\alpha+n)(\beta+n)} = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \quad (\alpha, \beta \neq -1, -2, \ldots).$$

939. Demuestre la fórmula de Weierstrass

$$\frac{1}{\Gamma(z+1)}=e^{Cz}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}},$$

donde C es la constante de Euler.

Sugerencia. Haga uso de la solución del problema **911**.

940*. Sea $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ la sucesión de todos los números ($p_1=2$, $p_2=3$, $p_3=5$, $\ldots$) y sea $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ ($n^{-s}=e^{-s \ln n}$) la función Zeta de Riemann analitica en el semiplano $\operatorname{Re} s>1$ (véase el problema **844**). Demuestre que:

1) $\zeta(s)=\dfrac{1}{\prod_{n=1}^{\infty}(1-p_n^{-s})}$;

2) la función $\zeta(s)$ no tiene ceros en el semiplano $\operatorname{Re} s>1$.

Observación. Existe una amplia bibliografía dedicada al estudio de la función Zeta. *Véase, por ejemplo, la monografía: E. C. Titchmarsh, The theory of the* Riemann Zeta-function, Clarendon Press, Oxford, 1951.

941*. Demuestre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n}$, donde $\{p_n\}$ es la sucesión de los números primos, diverge.

§ 2. DESARROLLO EN SERIES DE FRACCIONES SIMPLES Y EN PRODUCTOS INFINITOS. SUMACIÓN DE SERIES

942. Sea $f(z)$ una función meromorfa de polos simples en los puntos $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, donde $0<|a_1|\leqslant|a_2|\leqslant\ldots$ y $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$. Sea A_n el residuo de la función $f(z)$ respecto al polo a_n ($n=1, 2, \ldots$). Supongamos que existe una sucesión de contornos cerrados C_m que verifica las condiciones siguientes:

1) C_m no pasa por ninguno de los puntos a_n;

2) cada contorno C_m está contenido en el interior del contorno C_{m+1};

3) la distancia mínima entre el contorno C_m y el origen de coordenadas (*designémosla mediante* R_m) *crece sin límite cuando* $m\to\infty$;

4) la razón entre la longitud L_m del contorno C_m y R_m se mantiene acotada, es decir, $L_m=O(R_m)$;

5) $\max_{z\in C_m}|f(z)|=o(R_m)$ (la condición 5 se cumple obviamente si la función $f(z)$ es acotada en todos los contornos C_m).

Demuestre que en estas condiciones tiene lugar el desarrollo de la función $f(z)$ en fracciones simples

$$f(z)=f(0)+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\left(\frac{1}{z-a_n}+\frac{1}{a_n}\right),$$

y que la convergencia de la serie será uniforme en todo recinto cerrado que no contenga los puntos a_n, si bajo el signo de la suma se agrupan los sumandos correspondientes a los polos comprendidos entre C_m y C_{m+1} $(m=1, 2, \ldots)$.

Sugerencia. Aplique el teorema de los residuos a la integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_m}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta(\zeta-z)}$$

y pase al límite para $m\to\infty$.

Observación. En relación con diferentes generalizaciones del teorema enunciado véase, por ejemplo, [1, cap. IV, § 4, n° 1].

En los problemas **943—950** demuestre la validez de los desarrollos.

943. $\operatorname{ctg} z=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2\pi^2}$. **944.** $\frac{1}{\operatorname{sen} z}=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2z}{z^2-n^2\pi^2}$.

945. $\operatorname{tg} z=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{\left[\frac{(2n-1)\pi}{2}\right]^2-z^2}$. **946.** $\frac{1}{\cos z}=\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)}{z^2-\left[\frac{(2n-1)\pi}{2}\right]^2}$.

947. $\operatorname{th} z=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2+\left[\frac{(2n-1)\pi}{2}\right]^2}$. **948.** $\frac{1}{\operatorname{sh} z}=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2z}{z^2+n^2\pi^2}$.

949. $\frac{z}{e^z-1}=1-\frac{z}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z^2}{z^2+4n^2\pi^2}$. **950.** $\frac{1}{\operatorname{sen}^2 z}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-n\pi)^2}$.

---

951. Sea $f(z)$ una función entera de ceros simples en los puntos $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, donde $0<|a_1|\leqslant|a_2|\leqslant\ldots$ y $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$. Supongamos que existe un sistema de contornos $\{C_n\}$ que verifica las condiciones 1), 2), 3) y 4) del problema **942** y tal que

$$\max_{z\in C_m}=\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|=o(R_m).$$

Demuestre que en todo el plano tiene lugar el desarrollo

$$f(z)=f(0)\,e^{\frac{f'(0)}{f(0)}z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{\frac{z}{a_n}}.$$

En los problemas **952—958** demuestre la validez de los desarrollos.

952. $\operatorname{sen} z=z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$.

953. $\cos z = \prod_{n=0}^{\infty} \left\{1 - \left[\frac{2z}{(2n+1)\pi}\right]^2\right\}$.

954. $\operatorname{sh} z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{n^2 z^2}\right)$.

955. $\operatorname{ch} z = \prod_{n=0}^{\infty} \left\{1 + \left[\frac{2z}{(2n+1)\pi}\right]^2\right\}$.

956. $e^z - 1 = z e^{\frac{z}{2}} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{4n^2\pi^2}\right)$.

957. $e^{az} - e^{bz} = (a-b) z e^{\frac{1}{2}(a+b)z} \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{(a-b)^2 z^2}{4n^2\pi^2}\right]$.

958. $\operatorname{ch} z - \cos z = z^2 \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^4}{4n^4\pi^4}\right)$.

---

959. Sea $f(z)$ una función meromorfa con un número finito de polos $a_1, a_2, \ldots, a_m$ que no coinciden con ninguno de los puntos $z = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Demuestre que, si existe una sucesión de contornos $\{C_n\}$ que tienden al punto infinito y tales que

$$\lim_{n \to \infty} \int_{C_n} f(z) \operatorname{ctg} \pi z \, dz = 0, \qquad (1)$$

entonces $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = -\pi \sum_{k=1}^{m} \operatorname{res} [f(z) \operatorname{ctg} \pi z]_{z=a_k}$.

960. Demuestre que, si en las condiciones del problema anterior la condición (1) es sustituida por la condición $\lim_{n \to \infty} \int_{C_n} \frac{f(z)\,dz}{\operatorname{sen} \pi z} = 0$, entonces

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n f(n) = -\pi \sum_{k=1}^{m} \operatorname{res} \left[\frac{f(z)}{\operatorname{sen} \pi z}\right]_{z=a_k}$$

En los problemas **961—968** halle la suma de las series suponiendo que el número a es tal que ninguno de los denominadores se anula.

961. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a+n)^2}$. 962. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(a+n)^2}$. 963. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

964. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2}$. 965. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+a^2}$. 966. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.

967. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}$ (k es un número natural).

Sugerencia. Demuestre primero que, si $z=0$ es un polo de la función $f(z)$, la fórmula para la suma de la serie establecida en el problema **959** sigue siendo válida, siempre que en su miembro de la izquierda la suma se extiende a todos los valores de n desde $-\infty$ hasta $+\infty$, salvo el valor $n=0$. Para calcular res $\left[\frac{\operatorname{ctg}\pi z}{z^{2k}}\right]_{z=0}$ conviene emplear el desarrollo del problema **487**.

968. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n \operatorname{sen} bn}{a^2-n^2}\ (-\pi<b<\pi)$.

Sugerencia. Haga uso de la integral $\int_{C_n} \frac{ze^{ibz}\,dz}{(a^2-z^2)\operatorname{sen}\pi z}$ (C_n es un contorno del problema **960**).

969. Demuestre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2-3)\sqrt{4n^2-3}} = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x \operatorname{ctg}\pi x}{(3-x^2)\sqrt{3-4x^2}}\,dx + \frac{1}{6}\operatorname{ctg}\left[\pi\left(2-\sqrt{3}\right)\right].$$

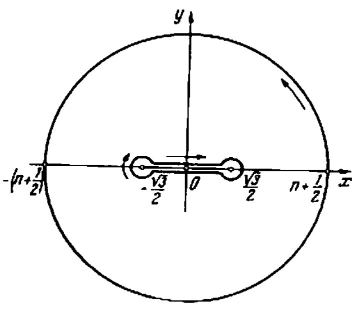


FIG. 30

Sugerencia. Haga uso de la integral $\int_{C_n} \frac{z \operatorname{ctg}\pi z\,dz}{(z^2-3)\sqrt{4z^2-3}}$, donde C_n es el contorno que limita el recinto biconexo indicado en la fig. 30.

§ 3. CARACTERSTICAS DE CRECIMIENTO DE FUNCIONES ENTERAS[1]

Sea $f(z)$ una función entera y sea $M(r)=\max_{|z|=r}|f(z)|$. El número $\rho=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln\ln M(r)}{\ln r}$ se llama *orden* de la función entera. Si $0<\rho<\infty$, el número

[1] En relación con los problemas de este parágrafo véase *Б. Я. Левин*, Распределение корней целых функций. Гостехиздат, 1956 (*Levin B. Y.*, Distribución de raíces de funciones enteras), así como [1, cap. VII, § 1].

$\sigma = \overline{\lim\limits_{r \to \infty}} \dfrac{\ln M(r)}{r^{\rho}}$ se llama *tipo* de la función. Si $\sigma = 0$, se dice que la función $f(z)$ es una función de *tipo minimal*: si $\sigma = \infty$, se dice que la función $f(z)$ es una función de *tipo maximal*; si $0 < \sigma < \infty$, se dice que la función $f(z)$ es una función de *tipo normal*.

970. Demuestre las proposiciones siguientes:

1) Si $\rho \neq \infty$ y $\sigma \neq \infty$ son el orden y el tipo respectivamente de la función $f(z)$, para cualquier $\varepsilon > 0$ se puede indicar un número $R(\varepsilon)$ tal que para $r > R$ son válidas las desigualdades

$$M(r) < e^{r^{\rho+\varepsilon}} \quad \text{y} \quad M(r) < e^{(\sigma+\varepsilon) r^{\rho}}.$$

Se puede indicar también unas sucesiones de números $\{r_n\}$ y $\{r'_n\}$ convergentes hacia el infinito para las cuales

$$M(r_n) > e^{r_n^{\rho-\varepsilon}} \quad \text{y} \quad M(r'_n) > e^{(\sigma-\varepsilon) r_n'^{\rho}}.$$

2) Si para algún número natural k se tiene

$$0 < \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{M(r)}{r^k} < \infty,$$

$f(z)$ es un polinomio de grado k $\left(\text{y, por consiguiente, existe } \lim\limits_{r \to \infty} \ln \dfrac{M(r)}{r^k}\right)$.

Sugerencia. Haga uso de las desigualdades de Cauchy para los coeficientes de la serie de potencias $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$.

3) Si $f(z)$ es una función entera transcendente, se tiene

$$\lim_{r \to \infty} \frac{\ln M(r)}{\ln r} = \infty.$$

En los problemas **971—983** determine el orden y el tipo de las funciones indicadas (n es un número natural).

971. $c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + \ldots + c_n$.

972. e^{az^n} $(a > 0)$. **973.** $z^n e^{3z}$. **974.** $z^2 e^{2z} - e^3$

975. $e^{5z} - 3e^{3z^3}$. **976.** $e^{(a-i)z^2}$. **977.** $\operatorname{sen} z$.

978. $\operatorname{ch} z$. **979.** $e^z \cos z$. **980.** $\cos\sqrt{z}$.

981*. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{(2^m \cdot n)!}$ (m es un número natural). **982.** e^{e^z}.

983*. $\int\limits_0^1 e^{zt^2}\, dt$.

984. Una función entera $f(z)$ es de orden ρ y de tipo σ $(0 \leqslant \sigma \leqslant \infty)$. Demuestre que la función $P(z) f(z) + Q(z)$, donde

$P(z)$ y $Q(z)$ son polinomios cualesquiera, es también de orden ρ y de tipo σ.

985. Las funciones enteras $f_1(z)$ y $f_2(z)$ son de orden ρ_1 y ρ_2, $\rho_1 \neq \rho_2$, respectivamente. ¿Qué se puede decir acerca del orden ρ^* de las funciones $f_1(z) f_2(z)$ y $f_1(z)+f_2(z)$?

986. Las funciones enteras $f_1(z)$ y $f_2(z)$ son de un mismo orden ρ y de tipo σ_1 y σ_2, $\sigma_1 \neq \sigma_2$, respectivamente. ¿Qúe se puede decir acerca del orden ρ^* y del tipo σ^* de las funciones:

1) $f_1(z) f_2(z)$, 2) $f_1(z)+f_2(z)$?

987. Las funciones enteras $f_1(z)$ y $f_2(z)$ son de un mismo orden ρ y de un mismo tipo σ. ¿Qué se puede decir acerca del orden ρ^* y del tipo σ^* de las funciones:

1) $f_1(z) f_2(z)$, 2) $f_1(z)+f_2(z)$?

988*. $f(z)=\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{\lambda_n^2}\right)$, $\lambda_n>0$ $(n=1, 2, \ldots)$, $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n}{\lambda_n}=$ $=\alpha>0$, $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \frac{n}{\lambda_n}=\beta<\infty$.

Demuestre que $f(z)$ es una función entera de primer orden y que su tipo σ es tal que $\pi\alpha \leqslant \sigma \leqslant \pi\beta$.

989. $f(z)=\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^{2k}}{\lambda_n^2}\right)$, $\lambda_n>0$ $(n=1, 2, \ldots)$, $2k$ es un número natural. Demuestre las proposiciones:

1) si $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n}{\lambda_n}=0$, entonces $f(z)$ es una función entera que crece no más rápidamente que una función de orden k y de tipo mínimo;

2) si $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n}{\lambda_n}=\infty$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2}<\infty$, entonces $f(z)$ es una función que crece no menos lentamente que una función de orden k y de tipo máximo.

Sugerencia. Haga uso del método de solución del problema anterior.

990*. Demuestre que el orden y el tipo de una función entera no varían al derivar la función.

Resuelva los problemas **991—998** basándose en el teorema siguiente.

Si el desarrollo de una función entera en serie de potencias es de la forma $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, entonces el orden ρ y el tipo σ de esta función se determinan por las igualdades

$$\rho=\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{n \ln n}{\ln \left|\frac{1}{c_n}\right|}, \qquad (\sigma e \rho)^{\frac{1}{\rho}}=\overline{\lim_{n \to \infty}}\left(n^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[n]{|c_n|}\right).$$

991. Demuestre que la función entera

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(Az)^n}{\Gamma(\alpha n+1)}\quad (A>0,\ \alpha>0)$$

es de orden $\rho=1/\alpha$ y de tipo $\sigma=A^{1/\alpha}$.

Sugerencia. Haga uso de la fórmula de Stirling

$$\Gamma(\alpha n+1)=\left(\frac{\alpha n}{e}\right)^{\alpha n}\sqrt{2\pi\alpha n}\left[1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

En los problemas **992—998** halle el orden y el tipo de las funciones dadas.

992. $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{n}\right)^n$. **993.** $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\frac{n}{a}}z^n\ (a>0)$.

994. $f(z)=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n\ln n}\right)^{\frac{n}{a}}z^n\ (a>0)$. **995.** $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-n^2}z^n$.

996. $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^{n^{1+a}}}\ (a>0)$. **997.** $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{ch}\sqrt{n}}{n!}z^n$.

998. $z^{-\nu}J_\nu(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{n!\,\Gamma(n+\nu+1)}$ ($\nu>-1$; $J_\nu(z)$ es la función de Bessel de ν-ésimo orden).

Si ρ es el orden de la función entera $f(z)$ $(0<\rho<\infty)$, la función $h(\varphi)=\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\ln|f(re^{i\varphi})|}{r^\rho}$ se llama *indicatriz* de crecimiento de la función $f(z)$.

En los problemas **999—1005** halle el orden ρ y la indicatriz $h(\varphi)$ de la función correspondiente.

999. e^z. **1000.** e^z+z^2. **1001.** $\operatorname{sen} z$. **1002.** $\cos z$.

1003. $\operatorname{ch} z$. **1004.** e^{z^n}. **1005.** $\frac{\operatorname{sen}\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$.

1006. La función entera $f(z)$ tiene la indicatriz $h(\varphi)$ y $P(z)$ es un polinomio. ¿Cuál es la indicatriz $h^*(\varphi)$ de las funciones 1) $f(z)+P(z)$, 2) $f(z)P(z)$?

1007. Sea $P(z)$ un polinomio cualquiera. Dé un ejemplo de una función entera $f(z)$ (de orden finito diferente de cero), cuya indicatriz $h(\varphi)$ es igual a cero en cierto intervalo, mientras que la indicatriz de la función $f(z)+P(z)$ es negativa en ese mismo intervalo.

CAPITULO VII

INTEGRALES DE TIPO DE CAUCHY. FORMULAS INTEGRALES DE POISSON Y DE SCHWARZ

§ 1. INTEGRALES DE TIPO DE CAUCHY

La integral de forma

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z},$$

donde C es un contorno suave [1] (cerrado o no cerrado) y $\varphi(\zeta)$ es una función continua en el contorno C, a excepción, posiblemente, de un número finito de puntos, donde tiene discontinuidades integrables, se llama *integral de tipo de Cauchy*. La función $\varphi(\zeta)$ se llama *densidad* y $\frac{1}{\zeta-z}$ *núcleo* de la integral. La integral de tipo de Cauchy representa una función $F(z)$ analítica en todo recinto que no contiene puntos del contorno C. Además

$$F^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z)^{n+1}}. \tag{1}$$

Supongamos que $\varphi(\zeta)$ verifica en el contorno C la condición de Lipschitz de orden α $(0<\alpha\leqslant 1)$ (brevemente, $\varphi(\zeta)\in \mathrm{Lip}\,\alpha$), es decir,

$$|\varphi(\zeta_1)-\varphi(\zeta_2)|<k\,|\zeta_1-\zeta_2|^{\alpha},$$

donde los puntos ζ_1 y ζ_2 pertenecen al contorno C y k es una constante. En estas condiciones, si el punto ζ_0 del contorno no es un extremo suyo, existe *la integral singular*

$$F(\zeta_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-\zeta_0},$$

definida como el valor principal de la integral de tipo de Cauchy.

---

[1] Entendemos por contorno suave una curva simple (es decir, que no se interseca consigo mismo) con una tangente que varía continuamente y sin puntos de retroceso. Cabe señalar que las condiciones impuestas al contorno C pueden ser considerablemente ampliadas. Véase *И. И. Привалов*, Граничные свойства аналитических функций, М.—Л., 1950 (*Priválov I. I.*, Propiedades de frontera de funciones analíticas). Se pueden considerar también contornos compuestos por un número finito de contornos del tipo señalado.

Este valor principal se puede expresar a través de una integral impropia corriente mediante la fórmula

$$F(\zeta_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}d\zeta+\frac{1}{2}\varphi(\zeta_0)+\frac{\varphi(\zeta_0)}{2\pi i}\operatorname{Ln}\frac{b-\zeta_0}{a-\zeta_0}, \qquad (2)$$

donde los puntos a y b son los extremos del contorno C, si éste no es cerrado. La rama uniforme de Ln se escoge de manera que en el caso de un contorno cerrado ($a=b$) el término con el logaritmo desaparezca y la fórmula adquiera la forma

$$F(\zeta_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}d\zeta+\frac{1}{2}\varphi(\zeta_0). \qquad (2')$$

Si designamos mediante $F^+(\zeta_0)$ y $F^-(\zeta_0)$ los valores frontera de la integral $F(z)$ de tipo de Cauchy cuando $z\to\zeta_0$ *por la izquierda* de C y *por la derecha* de C respectivamente, tendremos de acuerdo con las fórmulas de Sojotski

$$\left.\begin{aligned} F^+(\zeta_0)&=F(\zeta_0)+\frac{1}{2}\varphi(\zeta_0),\\ F^-(\zeta_0)&=F(\zeta_0)-\frac{1}{2}\varphi(\zeta_0),\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

o bien

$$F(\zeta_0)=\frac{1}{2}[F^+(\zeta_0)+F^-(\zeta_0)],$$
$$F^+(\zeta_0)-F^-(\zeta_0)=\varphi(\zeta_0). \qquad (4)$$

Si C es contorno cerrado que se recorre como siempre, $F^+(\zeta)$ son los valores frontera de la función $F^+(z)$ definida *en el interior* del contorno (recinto D^+), mientras que $F^-(\zeta)$ son los valores frontera de la función $F^-(z)$ definida *en el exterior* del contorno (recinto D^-)[1]. Véase, por ejemplo, [1, cap. III, § 3] o [2, cap. III, § 3].)

1008. Demuestre que, si C es un contorno cerrado y la densidad de la integral de tipo de Cauchy $\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$ puede ser representada en la forma $\varphi(\zeta)=\varphi^+(\zeta)+\varphi^-(\zeta)$, donde $\varphi^+(\zeta)$ y $\varphi^-(\zeta)$ son los valores frontera de las funciones analíticas en el interior y en el exterior del contorno C respectivamente, entonces

$$\Phi^+(z)=\varphi^+(z), \quad \Phi^-(z)=-\varphi^-(z)+\varphi^-(\infty).$$

Observación. Si en las condiciones del problema una de las funciones φ^- o φ^+ es idénticamente igual a cero, la integral de tipo de Cauchy se convierte en la integral de Cauchy para el recinto interior o el recinto exterior respectivamente.

1009. Sea C un contorno cerrado. Halle $F^+(z)$ y $F^-(z)$, si la densidad de la integral de tipo de Cauchy es la función dada (n es un número natural):

1) $\varphi(\zeta)=(\zeta-a)^n$; 2) $\varphi(\zeta)=\frac{1}{(\zeta-a)^n}$ (a en el interior de C);
3) $\varphi(\zeta)=\frac{1}{(\zeta-a)^n}$ (a en el exterior de C).

---

[1] A este mismo caso se reduce aquel en el que el contorno es una curva infinita que divide el plano en dos recintos.

1010. Halle $F^+(z)$ y $F^-(z)$, si:

1) la función $\varphi(\zeta)$ es el valor frontera de una función analítica en todo punto de D^+, a excepción de un número finito de puntos a_k, donde ella tiene polos;

2) la función $\varphi(\zeta)$ es el valor frontera de una función analítica en todo punto de D^-, a excepción de un número finito de puntos a_k, donde ella tiene polos (entre los puntos a_k puede figurar el punto $z=\infty$).

1011. Halle $F^+(z)$ y $F^-(z)$, si

$$\varphi(\zeta)=\frac{\zeta^3+i\zeta^2-\zeta+4i}{\zeta^4-3\zeta^2-4}+\frac{\ln\dfrac{\zeta-2}{\zeta-3}}{\zeta^2-4}$$

y C es la circunferencia $|\zeta|=3/2$.

1012. Halle $F^+(z)$ y $F^-(z)$, si $\varphi(\zeta)=\operatorname{ctg}\zeta$ y C es el circunferencia $|\zeta|=5$.

1013. Halle $F^+(z)$ y $F^-(z)$, si $\varphi(\zeta)=\dfrac{\zeta^2}{\zeta^2+1}$ y C es el eje real recorrido de la izquierda a la derecha.

Observación. Por la integral de tipo de Cauchy tomada a lo largo del eje real $F(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}\,d\tau$ se comprende su valor principal, si esta integral diverge en el sentido corriente.

1014. Halle $F^+(z)$ y $F^-(z)$, así como los valores frontera $F^{\pm}(\zeta)$ sobre el contorno de integración C, si C es la circunferencia $|\zeta|=R$ y $\varphi(\zeta)=\dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\operatorname{sen} n\theta)$ es la serie de Fourier uniformemente convergente de una función real $\psi(\theta)=\varphi(Re^{i\theta})$.

1015. 1) Sea C la circunferencia $|\zeta|=\pi/2$ y sea $f(\zeta)$ una función analítica en el circulo $|\zeta|\leqslant\pi/2$. Halle las funciones definidas mediante las integrales

$$I_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C f(\zeta)\operatorname{ctg}(\zeta-z)\,d\zeta,\quad I_2(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\operatorname{sen}(\zeta-z)},$$

en los recintos cuyos puntos z poseen la propiedad de que ninguno de los puntos $z+k\pi$ (k es un número entero) pertenece a C.

2) Resuelva los problemas planteados en el punto 1) suponiendo que C es la circunferencia $|\zeta|=\pi$.

1016. Sea C el segmento $[-1, 1]$, recorrido de la izquierda a la derecha, y sea $\varphi(\zeta)\equiv 1$. Halle $F(z)$ en el exterior de C, los valores frontera $F^{\pm}(\zeta)$ y el valor principal $F(\zeta)$ sobre C. Calcule, en particular, $F(\pm i)$, $F^{\pm}(0)$ y $F(0)$.

1017. Sea C la semicircunferencia $|\zeta|=R$, $0<\arg\zeta<\pi$ (con el origen en el punto R) y sea $\varphi(\zeta)\equiv 1$. Halle $F(z)$ en el exterior

de C, los valores frontera $F^{\pm}(\zeta)$ y el valor principal $F(\zeta)$ sobre C. Calcule, en particular, $F(0)$, $F^{\pm}(iR)$ y $F(iR)$. Halle también $F'(0)$.

1018. Sea C la semicircunferencia $|\zeta|=R$, $-\pi<\arg\zeta<0$ (con el origen en el punto R) y sea $\varphi(\zeta)\equiv 1$. Halle $F(z)$ en el exterior de C, los valores frontera $F^{\pm}(\zeta)$ sobre C, $F(0)$ y $F'(0)$.

1019. Sea $\varphi(\zeta)=\frac{1}{\zeta^n}$ la densidad de la integral de tipo de Cauchy. Halle $F(z)$ en el exterior de C, si el contorno C es la curva indicada:

1) la frontera del anillo $r<|z|<R$;
2) la recta $\operatorname{Im}\zeta=\pi$ recorrida de la izquierda a la derecha;
3) la frontera de la franja $|\operatorname{Im} z|<\pi$;
4) la semicircunferencia $|\zeta|=R$, $0<\arg\zeta<\pi$ (con el origen en el punto R);
5) la semicircunferencia $|\zeta|=R$, $-\pi<\arg\zeta<0$ (con el origen en el punto R).

En los puntos 4) y 5) halle los valores frontera $F^{\pm}(\zeta)$ sobre C y calcule $F(0)$.

En los problemas **1020—1025** halle $F(z)$ en el exterior de C, suponiendo que el contorno C es un arco que une los puntos a y b y que $\varphi(\zeta)$ es la función dada.

1020. $\varphi(\zeta)\equiv 1$. **1021.** $\varphi(\zeta)=\zeta$. **1022.** 1) $\varphi(\zeta)=\zeta^n$; 2) $\varphi(\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\zeta^n$ es una función entera.

1023. $\varphi(\zeta)=\frac{1}{\zeta-z_0}$ $(z_0 \overline{\in} C)$.

1024. $\varphi(\zeta)=\frac{1}{(\zeta-z_0)^n}$ $(z_0 \overline{\in} C)$. Calcule, en particular, $F(z_0)$.

Sugerencia. Haga uso de la igualdad

$$\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}=\frac{\varphi(\zeta)-\varphi(z)}{\zeta-z}=\frac{\varphi(z)}{\zeta-z}.$$

1025. Halle $F^{+}(z)$, $F^{-}(z)$ y los valores frontera $F^{\pm}(\zeta)$, si C es la circunferencia $|\zeta|=R$ y $\varphi(\zeta)$ es la función logarítmica definida por las condiciones:

1) $\varphi(\zeta)=\ln\zeta=\ln R+i\varphi$, $-\pi<\varphi\leqslant\pi$;
2) $\varphi(\zeta)=\ln\zeta=\ln R+i\varphi$, $0\leqslant\varphi<2\pi$.

Sugerencia. Considere el contorno compuesto de la circunferencia $|z|=R$ con un corte a lo largo del radio $[-R, 0]$ en el primer caso y a lo largo del radio $[0, R]$ en el segundo caso.

Observación. Si no se fija de antemano la rama del logaritmo, pero se requiere su prolongación continua a lo largo del contorno de integración, la integral dependerá de la selección del punto inicial de integración. Véase también la sugerencia y los ejemplos de la pág. 59.

1026. Halle $F^{+}(z)$, $F^{-}(z)$ y los valores frontera $F^{\pm}(\zeta)$ sobre C, si $(\varphi\zeta)=\ln\frac{\zeta}{\zeta-1}$ y el contorno C es:

1) la circunferencia $|\zeta| = R\ (R > 1)$;
2) la recta $\operatorname{Im}\zeta = 1$ recorrida de la izquierda a la derecha.

1027. Halle $F(z)$ y los valores frontera $F^{\pm}(\zeta)$ sobre C, si $\varphi(\zeta) = \ln\frac{\zeta}{\zeta-1}$ y el contorno C es la semicircunferencia $|\zeta| = R$ $(R > 1)$, $0 \leqslant \arg\zeta \leqslant \pi$ (con el origen en el punto R).

1028. Halle $F^{+}(z)$ y $F^{-}(z)$, si $\varphi(\zeta) = \sqrt{\zeta}\,(0 \leqslant \arg\sqrt{\zeta} < \pi)$ y C es la circunferencia $|\zeta| = 1$.

En los problemas **1029—1031** halle $F^{\pm}(z)$, si C es un contorno cerrado, los puntos a y b se encuentran en su interior y $\varphi(\zeta)$ es una rama uniforme de una función multiforme definida en el exterior del corte que une los puntos a y b y se encuentra en el interior del contorno C.

1029. $\varphi(\zeta) = \ln\frac{\zeta-a}{\zeta-b}$ $(\operatorname{Ln} 1 = 0)$.

1030. $\varphi(\zeta) = \sqrt{\frac{\zeta-a}{\zeta-b}}$ $(\varphi(\infty) = +1)$.

Sugerencia. Para calcular la integral a lo largo del contorno que rodea el corte, desarrolle $\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}$ en una serie de potencias de $\frac{1}{\zeta}$.

1031. $\varphi(\zeta) = (\zeta-a)^{\lambda}(\zeta-b)^{1-\lambda}$ $\left(\left.\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-b}\right|_{\zeta=\infty} = 1\right)$.

1032. Halle $F^{\pm}(z)$, si el contorno C es cerrado, el punto a pertenece al recinto D^{+}, el punto b pertenece al recinto D^{-} y $\varphi(\zeta) = \operatorname{Ln}\frac{\zeta-a}{\zeta-b}$ $(\operatorname{Ln} 1 = 0)$ es una rama uniforme definida en el exterior del corte que une los puntos a y b e interseca el contorno C en un punto ζ_0.

Sugerencia. Agregue a C el corte a lo largo del arco $\zeta_0 a$, si z pertenece al recinto D^{+}, y a lo largo del arco $\zeta_0 b$, si z se encuentra en el recinto D^{-}.

1033. Demuestre la validez de las igualdades $(0 < \lambda < 1)$:

1) $\int_0^1 \left(\frac{t}{1-t}\right)^{\lambda}\frac{dt}{t-z} = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\lambda\pi}\left[1 - \left(\frac{z}{z-1}\right)^{\lambda}\right]$ $(z \,\overline{\in}\, [0, 1])$;

2) $\int_0^1 \left(\frac{t}{1-t}\right)^{\lambda}\frac{dt}{t-\tau} = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\lambda\pi}\left[1 - \left(\frac{\tau}{1-\tau}\right)^{\lambda}\cos\lambda\pi\right]$ $(\tau \in (0, 1))$.

Sugerencia. Con el fin de obtener la primera fórmula considere la integral de Cauchy $\frac{1}{2\pi i}\int_C \left(\frac{\zeta}{\zeta-1}\right)^{\lambda}\frac{d\zeta}{\zeta-z}$, donde $\left(\frac{\zeta}{\zeta-1}\right)^{\lambda}$ es la función uniforme en el plano con el corte rectilíneo a lo largo de $[0, 1]$ e igual a 1 en el ∞ y C es la frontera del recinto biconexo formado por el círculo $|\zeta| < R$ $(R > 1)$ con un corte a lo largo del segmento $[0, 1]$. La segunda fórmula se obtiene de la primera empleando las fórmulas de Sojotski.

1034. Calcule la integral singular

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\frac{t^2+3}{t-x}dt \quad (-1<x<1).$$

1035. Halle las integrales

1) $\int_0^1 \ln\frac{1-t}{t}\frac{dt}{t-z}$ $(z\overline{\in}[0,\ 1])$;

2) $\int_0^1 \ln\frac{1-t}{t}\frac{dt}{t-\tau}$ $(\tau\in(0,\ 1))$.

1036. Consideremos la integral singular

$$F(z,\ t_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{d\tau}{(\tau-t_0)^{\gamma}(\tau-z)}\ (\gamma=\alpha+i\beta,\ 0\leqslant\alpha<1).$$

donde C es un arco que une los puntos a y b, t_0 es un punto de este arco y $(\tau-t_0)^{\gamma}$ es una rama uniforme en el plano con un corte que une los puntos t_0 y el ∞. Si el punto t_0 coincide con uno de los extremos del arco C, aceptaremos que el corte pasa por todo el contorno C; en cambio, si el punto t_0 es interior, el corte lo llevaremos a lo largo del arco $(t_0,\ b)$ del contorno C. Demuestre las proposiciones siguientes:

1) En una vecindad del punto a se tiene

$$F(z,\ a)=\frac{e^{i\gamma\pi}}{2i\ \text{sen}\ \gamma\pi}(z-a)^{-\gamma}+F_1(z)\ (z\overline{\in}C),$$

$$F(t,\ a)=\frac{\text{ctg}\ \gamma\pi}{2i}(t-a)^{-\gamma}+F_1(t)\ \ (t\in C),$$

donde $F_1(z)$ es una función analítica en una vecindad del punto a.

Sugerencia. Considere la diferencia

$$F_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{d\tau}{(\tau-a)^{\gamma}(\tau-z)}-\frac{e^{i\gamma\pi}}{2i\ \text{sen}\ \gamma\pi}(z-a)^{-\gamma}$$

y, empleando las fórmulas de Sojotski, demuestre que $F_1(z)$ será una función analítica en una vecindad del punto a.

2) En una vecindad del punto b se tiene

$$F(z,\ b)=-\frac{e^{-i\gamma\pi}}{2i\ \text{sen}\ \gamma\pi}(z-b)^{-\gamma}+F_2(z)\ \ (z\overline{\in}C),$$

$$F(t,\ b)=-\frac{\text{ctg}\ \gamma\pi}{2i}(t-b)^{-\gamma}+F_2(t)\ \ (t\in C),$$

donde $F_2(z)$ es una función analítica en una vecindad del punto b.

3) En una vecindad de un punto interior t_0 del contorno C se tiene

$F(z,\ t_0)=(z-t_0)^{-\gamma}+F_3(z)$ a la izquierda de C,

$F(z, t_0) = F_4(z)$ a la derecha de C,

$F(t, t_0) = \frac{1}{2}(t - t_0)^{-\gamma} + F_5(t)$ si $t \in C$,

donde $F_3(z)$, $F_4(z)$ y $F_5(z)$ son analíticas en una vecindad del punto t_0.

1037. Analice el comportamiento de la integral de tipo de Cauchy

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \ln\frac{\zeta}{\zeta-1}\frac{d\zeta}{\zeta-z}$$

cerca de los puntos $z = -R$ y $z = R$, si C es la semicircunferencia $|\zeta| = R$ $(R > 1)$ perteneciente al semiplano superior (con el origen en el punto R).

Sugerencia. Véase el problema 1027.

Observación. Sobre el comportamiento de las integrales de tipo de Cauchy cerca de una curva singular véase *Н. И. Мусхелишвили*, Сингулярные интегральные уравнения, Физматгиз, 1962 (*Musjelishvili N. I.*, Ecuaciones integrales singulares), cap. I. o *Ф. Д. Гахов*, Краевые задачи, Физматгиз, 1963 (*Gájov F. D.*, Problemas de frontera), cap. I.

§ 2. INTEGRAL DE DIRICHLET, FUNCIONES ARMONICAS, POTENCIAL LOGARÍTMICO Y FUNCION DE GREEN

La integral

$$D(u) = \iint_G (u_x^2 + u_y^2)\,dx\,dy$$

se llama *integral de Dirichlet* y la integral

$$D(u, v) = \iint_G (u_x v_x + u_y v_y)\,dx\,dy$$

es su *forma bilineal* correspondiente.

1038. Demuestre las siguientes propiedades de la integral de Dirichlet y de su forma bilineal correspondiente:

1) $D(u) = \iint_G \left(u_r^2 + \frac{1}{r}u_\varphi^2\right)dx\,dy$ $(z = x + iy = re^{i\varphi})$;

2) $D(u)$ y $D(u, v)$ son invariantes respecto a las transformaciones conformes del recinto C;

3) $D^2(u, v) \leqslant D(u)\,D(v)$ (el signo de igualdad tiene lugar solamente en el caso en que $u/v = \text{const}$);

4) si $f(z) = u + iv$ es una función analítica en el recinto C, se tiene

$$D(u) = D(v) = D(f) = \iint_G |f'(z)|^2\,dx\,dy.$$

¿Cuál es en este caso el significado geométrico de $D(f)$?

1039. Empleando la fórmula de Green

$$\iint_G v\,\Delta u\,dx\,dy + D(u,\ v) = \int_C v\frac{\partial u}{\partial n}\,ds$$

(n es la normal exterior; Δ es el operador de Laplace) demuestre las siguientes propiedades de las funciones armónicas u, u_1 y u_2 (v es la función conjugada de u):

1) $D(u) = \int_C u\frac{\partial u}{\partial n}\,ds = \int_C u\,dv$; 2) $\int_C \frac{\partial u}{\partial n}\,ds = \int_C dv = 0$;

3) si $u_1 = u_2$ sobre C, se tiene $u_1 \equiv u_2$ en G;

4) si $\frac{\partial u_1}{\partial n} = \frac{\partial u_2}{\partial n}$ sobre C, se tiene $u_1 - u_2 = \text{const}$ en G.

1040. Demuestre que si u es armónica en el círculo $|z| < R$ y continua en el círculo cerrado $|z| \leqslant R$, se tiene

$$u(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(Re^{i\theta})\,d\theta = \frac{1}{\pi R^2}\iint_{|z|<R} u(re^{i\varphi})\,r\,dr\,d\varphi.$$

Sugerencia. De la igualdad $\int_C \frac{\partial v}{\partial n}ds = 0$ se deduce que la integral $\int_{|z|=r} u\,d\varphi$ *no depende de r; halle su valor pasando al límite para $r \to 0$ y pase después al límite para $r \to R$.*

1041. Las integrales de tipo

$$\iint_C \rho(\zeta)\ln\frac{1}{|\zeta - z|}\,d\xi\,d\eta,\quad \int_C \rho(\zeta)\ln\frac{1}{|\zeta - z|}\,|d\zeta|,$$

$$\int_C \nu(\zeta)\frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{|\zeta - z|}\,|d\zeta|$$

($\zeta = \xi + i\eta$, n es la normal a C) se donominan respectivamente *potencial logarítmico, potencial logarítmico de una capa simple y potencial logarítmico de una capa doble.*

Compruebe las siguientes igualdades:

1) $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\frac{1}{|\zeta - z|}\,d\theta = \begin{cases}\ln\frac{1}{|z|}, & \text{si } |z| > R\\ \ln\frac{1}{R}, & \text{si } |z| \leqslant R;\end{cases}\qquad (\zeta = Re^{i\theta}),$$

2) $$\frac{1}{\pi R^2}\iint_{|\zeta|<R}\ln\frac{1}{|\zeta - z|}\,d\xi\,d\eta = \begin{cases}\ln\frac{1}{|z|}, & \text{si } |z| > R,\\ \ln\frac{1}{R} + \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{|z|}{R}\right)^2\right], & \text{si } |z| \leqslant R;\end{cases}$$

3) $$\int_C \nu(\zeta)\frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{|\zeta - z|}\,|d\zeta| = \int_C \nu(\zeta)\,d\arg(\zeta - z)$$

(la normal n se toma hacia la izquierda respecto al recorrido de C);

4) $$\int_{-a}^{a} \frac{\partial}{\partial \eta} \ln \frac{1}{|\zeta - z|} d\xi = \begin{cases} \varphi & \text{si } \operatorname{Im} z > 0, \\ -\varphi, & \text{si } \operatorname{Im} z < 0, \end{cases}$$

donde $\varphi\, (0 < \varphi < \pi)$ es el ángulo bajo el cual se ve el segmento $(-a,\ a)$ desde el punto $z\, (a > 0)$.

Se llama *función de Green* $g(x,\ y,\ \xi,\ \eta)$ (brevemente, $g(z,\ \zeta)$, $z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$) del problema de Dirichlet para el recinto G una función armónica respecto a ambos pares de las variables $x,\ y$ y $\xi,\ \eta$ que es igual a cero en la frontera del recinto G, tiene una singularidad en $z = \zeta$ y tal que

$$g(z,\ \zeta) = \ln \frac{1}{|z - \zeta|} + \text{una función armónica.}$$

La función de Green es simétrica respecto a sus argumentos, es decir, $g(z,\ \zeta) = g(\zeta,\ z)$ (véase, por ejemplo, [1, cap. VI, § 1. nº 6]).

1042. Enuncie el problema de Dirichlet para una función armónica equivalente a la determinación de la función de Green $g(z,\ \zeta)$.

1043. Sea $w = f(z,\ \zeta)$ una función que transforma conformemente un recinto simplemente conexo de Jordan G en el círculo $|w| < 1$ de manera que $f(\zeta,\ \zeta) = 0$ $(\zeta \in G)$. Demuestre las relaciones

$$g(z,\ \zeta) = -\ln |f(z,\ \zeta)|, \tag{1}$$
$$f(z,\ \zeta) = e^{-(g + ih)}, \tag{2}$$

donde $h(z,\ \zeta)$ es la función armónica conjugada de $g(z,\ \zeta)$.

1044. Empleando la relación (1) del problema **1043**, halle la función de Green $g(z,\ \zeta)$ para los recintos siguientes:

1) para el círculo $|z| < R$; 2) para el semiplano $\operatorname{Im} z > 0$;

3) para la franja $0 < \operatorname{Im} z < 1$.

1045. Demuestre las siguientes proposiciones (n es la normal interior, γ_r es la circunferencia $|z - \zeta| = r$):

1) Si $u(z)$ es continua cerca de $z = \zeta$, se tiene

$$\lim_{r \to 0} \int_{\gamma_r} u(r) \frac{\partial g(z,\ \zeta)}{\partial n} ds = 2\pi (u,\ z).$$

2) Si $u(z)$ es continuamente diferenciable cerca de $z = \zeta$, se tiene

$$\lim_{r \to 0} \int_{\gamma_r} g(z,\ \zeta) \frac{\partial u(z)}{\partial n} ds = 0.$$

3) Si $u(z)$ es armónica en G y continuamente diferenciable sobre C, se tiene

$$u(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{C} u(z) \frac{\partial g(z,\ \zeta)}{\partial n} ds \quad (z \in G).$$

Sugerencia. Pase al límite para $r \to 0$ en la fórmula

$$\int_{C} \left(u \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds = \int_{\gamma_r} \left(u \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds.$$

§. 3. INTEGRAL DE POISSON, FORMULA DE SCHWARZ, MEDIDA ARMONICA

Si la función real $u(\zeta)=u(R, \theta)$ está definida y es continua a trozos sobre la circunferencia $\zeta=Re^{i\theta}$ $(0\leq\theta<2\pi)$, *la integral de Poisson*

$$u(z)=u(r, \varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(R, \theta)\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}\,d\theta \qquad (1)$$

determina en el círculo $|z|<R$ $(z=re^{i\varphi})$ una función armónica que en los puntos de continuidad de $u(\zeta)$ toma valores frontera iguales a $u(\zeta)$:

$$\lim_{z\to\zeta} u(z)=u(\zeta)$$

($z\to\zeta$ a lo largo de cualesquiera caminos no tangentes). La función correspondiente $f(z)=u+iv$, analítica en el círculo $|z|<R$, se determina mediante *la fórmula de Schwarz:*

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\,d\theta+iv(0)$$

($v(0)$ es un número real cualquiera).

1046. Demuestre las proposiciones siguientes:

1) $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}\,dr=1;$

2) $u(r, \varphi)-u(R, \theta_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[u(R, \theta)-u(R, \theta_0)]\times$

$$\times\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}\,d\theta;$$

3) si $|u(R, \theta)-u(R, \theta_0)|<\varepsilon$ para $|\theta-\theta_0|<\alpha$, se tiene

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|\theta-\theta_0|<\alpha}|u(R, \theta)-u(R, \theta_0)|\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}\,d\theta<\varepsilon;$$

4) si $|\theta-\theta_0|>\alpha$ y $|\varphi-\theta_0|<\frac{\alpha}{2}$, se tiene

$$R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2>4Rr\,\mathrm{sen}^2\frac{\alpha}{4};$$

5) si $|\varphi-\theta_0|<\frac{\alpha}{2}$ y se cumplen las condiciones del punto 3), se tiene

$$|u(r, \varphi)-u(R, \theta_0)|<\varepsilon+\frac{M(R^2-r^2)}{2\pi A},$$

donde $A=4\pi Rr\,\mathrm{sen}^2\frac{\alpha}{4}$ y $M=\int_0^{2\pi}|u(R, \theta)-u(R, \theta_0)|\,d\theta$.

1047. Demuestre que, siendo $\zeta=Re^{i\theta}$ y $z=re^{i\varphi}$, se tiene

$$\frac{\zeta+z}{\zeta-z}=\frac{(R^2-r^2)+i2Rr\,\mathrm{sen}(\varphi-\theta)}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}.$$

Empleando la igualdad demostrada, obtenga los desarrollos siguientes:

$$u(z)=u(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n(a_n\cos n\varphi+b_n\,\text{sen}\,n\varphi),$$

$$v(z)=v(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n(-b_n\cos n\varphi+a_n\,\text{sen}\,n\varphi),$$

$$f(z)=f(0)+\sum_{n=1}^{\infty}c_nz^n,\quad f(0)=u(0)+iv(0),$$

donde

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u(R,\ \theta)\cos n\theta\,d\theta,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u(R,\ \theta)\,\text{sen}\,n\theta\,d\theta,$$

$$c_n=\frac{a_n-ib_n}{R^n}=\frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi}u(R,\ \theta)e^{-in\theta}\,d\theta.$$

1048. Demuestre que para la integral de Dirichlet de una función armónica $u(z)$ se tiene

$$D(u)=\iint_{|z|<R}(u_x^2+u_y^2)\,dx\,dy=\pi\sum_{n=1}^{\infty}n(a_n^2+b_n^2)$$

(los coeficientes a_n y b_n se han definido en el problema anterior).

Puede ocurrir que ambos miembros de la igualdad se conviertan simultáneamente en infinito.

Sugerencia. Pase a las coordenadas polares $(r,\ \varphi)$ y demuestre que para $r<R$ se tiene

$$D_r(u)=\iint_{|z|<r}(u_x^2+u_y^2)\,dx\,dy=\pi\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{r}{R}\right)^{2n}(a_n^2+b_n^2).$$

1049. Demuestre que para la función continua

$$u(R,\ \theta)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\text{sen}\,n!\,\theta}{n^2}$$

la integral de Dirichlet determina una función $u(z)$ armónica en el círculo $|z|<R$ con valores frontera $u(R,\ \theta)$ y una integral infinita de Dirichlet $D(u)=\infty$.

1050. Resuelva, empleando la integral de Poisson, el problema exterior de Dirichlet para el círculo $|z|<R$: halle una función $u(z)$, armónica en el recinto $|z|>R$ y regular en el infinito, que

toma los valores frontera dados $a(\zeta)$ en la circunferencia $|\zeta|=R$. Determine el valor de $u(\infty)$.

Sugerencia. Realice la sustitución $z_1=R^2/\bar{z}$.

1051. Demuestre que para $|z|>R$ la fórmula de Schwarz (véase la introducción al § 3) define una función analítica $f_1(z)=u_1(z)+iv_1(z)$, regular en el infinito, y que tienen lugar los desarrollos

$$f_1(z)=-\overline{f\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right)}=-\overline{f(0)}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{z^n},\ c_{-n}=R^{2n}\bar{c}_n,$$

$$u_1(z)=-\left\{u(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^n(a_n\cos n\varphi+b_n\operatorname{sen}n\varphi)\right\},$$

$$v_1(z)=-v(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^n(-b_n\cos n\varphi+a_n\operatorname{sen}n\varphi),$$

donde a_n, b_n y c_n se definen igual que en el problema **1047**. Además, $\operatorname{Re}f_1(\zeta)=-\operatorname{Re}f(\zeta)=-u(\zeta)$ e $\operatorname{Im}f_1(\zeta)=\operatorname{Im}f(\zeta)$.

Sugerencia. Realice en la fórmula de Schwarz para $|z|>R$ la sustitución $z=R^2/\bar{z}_1$ y recurra a que $\zeta=R^2/\bar{\zeta}$ sobre la circunferencia $|\zeta|=R$.

En los problemas **1052—1057** halle la función $f(z)$ ($|z|<R$) y la función $f_1(z)$ ($|z|>R$), definidas por la fórmula de Schwarz, si $u(\zeta)$ es la función dada.

1052. 1) $u(\zeta)=\operatorname{Re}[\varphi(\zeta)+\psi(\zeta)]$,
2) $u(\zeta)=\operatorname{Im}[\varphi(\zeta)+\psi(\zeta)]$,

donde $\varphi(z)$ es una función analítica para $|z|\leqslant R$ y $\psi(z)$ una función analítica para $|z|\geqslant R$.

1053. $u(\zeta)=\operatorname{Re}\zeta^n$. **1054.** $u(\zeta)=\operatorname{Re}\frac{1}{\zeta^n}$.

1055. $u(\zeta)=\operatorname{Re}\ln\frac{\zeta}{\zeta-1}$ $(R>1)$.

1056. $u(\zeta)=\operatorname{Re}\sqrt{\frac{\zeta}{\zeta-1}}$ $\left(\text{si } \zeta>1, \text{ se tiene } \sqrt{\frac{\zeta}{\zeta-1}}>0;\ R>1\right)$.

1057. $u(\zeta)=\operatorname{Re}\ln\zeta$.

1058. Demuestre que la fórmula de Schwarz puede ser representada en la forma

$$f(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{|\zeta|=R}\frac{u(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}-\overline{f(0)}.$$

Sugerencia. Haga uso de la igualdad

$$\frac{\zeta+z}{\zeta(\zeta-z)}=\frac{2}{\zeta-z}-\frac{1}{\zeta}.$$

1059. Obtenga las fórmulas para el semiplano superior $\operatorname{Im}z>0$ análogas a la integral de Poisson y a la fórmula de Schwarz, es

decir, exprese una función armónica $u(z)$ y una función analítica $f(z)=u(z)+iv(z)$ mediante $u(t)$ $(-\infty < t < \infty)$.

Sugerencia. Haga uso de la transformación conforme del semiplano en el círculo.

1060. Deduzca la fórmula de Schwarz para la franja $0 < \operatorname{Im} z < 1$.

Sugerencia. Haga uso de la transformación conforme de una franja en el semiplano.

Se llama *medida armónica* $\omega(z, \alpha, G)$ de un arco frontera α en el punto z respecto al recinto G a una función acotada, armónica en G, igual a 1 en los puntos interiores del arco α e igual a 0 en los puntos interiores de la parte restante de la frontera. La medida armónica $\omega(z, \alpha, G)$ es invariante respecto a las transformaciones conformes.

En los problemas **1061—1064** el recinto G es el círculo $|z| < 1$ y $\omega(z, \theta_1, \theta_2)$ es la medida armónica del arco $\alpha = (\theta_1, \theta_2)$; $w = e^{i\theta}$, $\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$.

1061. Empleando la integral de Poisson demuestre que

$$\omega(z, \theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2\pi}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}\, d\theta,$$

y que, en particular, $\omega(0, \theta_1, \theta_2) = (\theta_2 - \theta_1)/2\pi$.

1062. Halle las líneas equipotenciales de la función $\frac{d\omega(z, \theta_1, \theta)}{d\theta}$ para un valor fijo de θ ($z = re^{i\varphi}$ es un punto variable).

Sugerencia. Demuestre que

$$\frac{d\omega}{d\theta} = \frac{1}{2\pi}\,\frac{|w'-z|}{|w-z|},$$

donde w' es el extremo de la cuerda que parte de w y pasa por z.

1063. Designemos mediante w' el extremo de la cuerda que parte del punto w y pasa por el punto z. Sea α el arco (θ_1, θ_2) y sea $\alpha'(z)$ el arco que describe el punto w' cuando el punto w recorre el arco α. Demuestre que la longitud del arco $\alpha'(z)$ es igual a $2\pi\omega(z, \theta_1, \theta_2)$.

1064. Halle las líneas equipotenciales de la medida armónica $\omega(z, \theta_1, \theta_2)$ del arco (θ_1, θ_2). Empleando esto demuestre que la integral que define la medida armónica (véase el problema **1061**) efectivamente toma los valores frontera: 1 en (θ_1, θ_2) y 0 en el complemento (se consideran los puntos interiores de los arcos).

1065. Para el semiplano $\operatorname{Im} z > 0$ determine la medida armónica $\omega(z, a, b)$ del segmento (a, b), del rayo $(-\infty, b)$ y del rayo (a, ∞). ¿Cuál es el significado geométrico de estas medidas armónicas?

1066. Halle la medida armónica de los lados del ángulo $0 < \arg z < \gamma$.

1067. Para el semicírculo $|z| < R$, $\operatorname{Im} z > 0$ halle las medidas armónicas del diámetro Δ y de la semicircunferencia Γ, así como las líneas equipotenciales de estas medidas armónicas.

1068. Halle la medida armónica de la semicircunferencia frontera Γ del recinto $|z| > R$, $\operatorname{Im} z > 0$.

1069. Halle la medida armónica de la circunferencia frontera Γ del recinto $|z| > R$, $0 < \arg z < 2\pi$.

1070. Halle la medida armónica de las circunferencias frontera del anillo $r < |z| < R$.

En los problemas **1071—1077** el recinto G está acotado por un contorno Γ compuesto de n contornos suaves $\Gamma_\nu (\nu = 1, 2, \ldots, n)$. Los contornos se recorren en la dirección positiva respecto al recinto G; la normal n es interior respecto al recinto G. La integral

$$\int_{\Gamma_\nu} df(z)$$

se llama *período* respecto a Γ_ν de una función analítica en G.

1071[1]. Demuestre que si una función armónica $u(z)$ es uniforme en G, en período de la función analítica $f(z) = u(z) + iv(z)$ a lo largo de Γ_ν es igual a $-i \int_{\Gamma_\nu} \frac{\partial u}{\partial n} ds$.

1072. Demuestre que para una función compleja de Green $g + ih$ de un recinto G ($g(z, \zeta)$ es la función de Green del recinto G y $h(z, \zeta)$ es la función armónica conjugada de g) el período a lo largo de Γ_ν es igual a $-2\pi i \omega_\nu(z)$, donde $\omega_\nu(z)$ es la medida armónica de Γ_ν respecto al recinto G. Demuestre que $\sum_{\nu=1}^{n} \omega_\nu(\zeta) \equiv 1$.

Sugerencia. Una función $u(\zeta)$ armónica en G puede ser representada en la forma

$$u(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} u(z) \frac{\partial g(z, \zeta)}{\partial n} ds \quad \text{(véase el problema 1045).}$$

1073. Exprese por medio de $\omega_\nu(z)$ la función acotada $u(z)$ armónica en G que tiene valores constantes c_ν sobre $\Gamma_\nu (\nu = 1, 2, \ldots, n)$.

1074. Demuestre que para la función $v(z)$, conjugada de una función $u(z)$ uniforme y armónica en $\bar{G}$, los períodos p_ν a lo largo

---

[1] En relación con los problemas 1071—1077 véase el complemento de *M. Schiffer* al libro de *R. Courant*, Dirichlet's principle, conformal mapping and minimal surfaces, Interscience Publ., New York, 1950

de Γ_ν admiten la representación

$$p_\nu = -\int_\Gamma u(z)\frac{\partial\omega_\nu(z)}{\partial n}\,ds.$$

1075. Sea $\bar{\omega}_\nu(z)$ la función armónica conjugada de $\omega_\nu(z)$ y sea $p_{\mu\nu}$ el período de la función $w_\nu(z) = \omega_\nu(z) + i\bar{\omega}_\nu(z)$ a lo largo de Γ_μ.

1) Demuestre que $p_{\mu\nu} = p_{\nu\mu}$ (μ, $\nu = 1, 2, \ldots, n$).

Sugerencia. Haga uso de la representación

$$p_{\mu\nu} = -\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \omega_\mu \frac{\partial\omega_\nu}{\partial n}\,ds.$$

2) Demuestre que $\sum_{\nu=1}^{n} p_{\mu\nu} = 0$ ($\mu = 1, 2, \ldots, n$).

1076. Sean c_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, n$) números reales cualesquiera.

1) Demuestre que si $p_{\nu\mu}$ son los números definidos en el problema 1075, la forma cuadrática $\sum_{\nu,\mu=1}^{n} p_{\nu\mu}c_\nu c_\mu \geqslant 0$ y la igualdad tiene lugar solamente si todos los c_ν son iguales entre sí.

Sugerencia. Aplique a la función armónica $\omega(z) = \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu\omega_\nu(z)$ la fórmula $D(\omega) = -\int_\Gamma \omega\frac{\partial\omega}{\partial n}\,ds$ (véase el problema 1039; el signo ha sido cambiado ya que ahora n es la normal interior).

2) Demuestre que la forma cuadrática $\sum_{\nu,\mu=1}^{n-1} p_{\nu\mu}c_\nu c_\mu$ es positivamente definida, es decir, es positiva para cualquier sistema de valores $\{c_\nu\}$, a excepción de $c_1 = c_2 = \ldots c_{n-1} = 0$.

1077. Demuestre que el sistema de ecuaciones

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} p_{\nu\mu}A_\mu = B_\mu \ (\mu = 1, 2, \ldots, n-1)$$

(A_μ son las incógnitas) tiene una solución única cualesquiera que sean B_μ. Empleando esto, demuestre que para toda función $u(z)$ armónica en $\bar{G}$, en general no uniforme, se pueden escoger las constantes $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ de manera que la función armónica

$$u_1(z) = u(z) + \sum_{\nu=1}^{n-1} A_\nu\bar{\omega}_\nu(z)$$

sea uniforme en G.

CAPITULO VIII

PROLONGACION ANALITICA. SINGULARIDADES DE CARACTER MULTIFORME. SUPERFICIES DE RIEMANN

§ 1. PROLONGACIÓN ANALÍTICA

1078. La función $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ se ha desarrollado en la serie de Taylor en una vecindad del punto $z=a$ ($|a|<1$). ¿Para qué valores de a este desarrollo permite prolongar analíticamente la función $f(z)$?

1079. La suma de la serie de potencias $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ ha sido desarrollada en la serie de Taylor en una vecindad del punto $z=-1/2$. ¿Cuál es el recinto en el que resulta prolongada de esta forma la función $f(z)$?

1080. Demuestre que la función $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}$ puede ser prolongada a un recinto mayor mediante la serie

$$\ln 2-\frac{1-z}{2}-\frac{(1-z)^2}{2\cdot 2^2}-\frac{(1-z)^3}{3\cdot 2^3}-\ldots$$

1081. Las series de potencias

$$f_1(z)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \quad \text{y} \quad f_2(z)=i\pi+\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-2)^n}{n}$$

no poseen ningún recinto común de convergencia. Demuestre, sin embargo, que las funciones $f_1(z)$ y $f_2(z)$ son prolongación analítica una de la otra.

1082. Demuestre que las funciones definidas mediante las series

$$1+az+a^2z^2+\ldots \quad \text{y} \quad \frac{1}{1-z}-\frac{(1-a)z}{(1-z)^2}+\frac{(1-a)^2z^2}{(1-z)^3}-\ldots,$$

son prolongación analítica una de la otra.

1083. Sea

$$f(z)=a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n+\ldots$$

una serie de potencias de radio de convergencia $R=1$. Realizando el cambio de variable $z=\frac{Z}{1+Z}$, la reduciremos a la forma

$$f(z)=f\left(\frac{Z}{1+Z}\right)=F(Z)=c_0+c_1Z+\ldots+c_nZ^n+\ldots$$

Designando mediante ρ el radio de convergencia de la serie obtenida, demuestre las proposiciones siguientes:

1) $\rho\geqslant 1/2$ y $\rho=1/2$, si el punto $z=-1$ es una singularidad de la función $f(z)$.

2) Si $\frac{1}{2}<\rho<1$, la igualdad $f(z)=F(Z)=F\left(\frac{z}{1-z}\right)$ permite prolongar analíticamente la función $f(z)$ en el recinto que es exterior respecto al círculo $|z|<1$ e interior respecto a la circunferencia de Apolonio $\left|\frac{z}{1-z}\right|=\rho$.

3) Si $\rho=1$, la igualdad indicada en el punto 2) prolonga analíticamente la función $f(z)$ al semiplano $\operatorname{Re} z<1/2$.

4) Si $\rho>1$, la función $f(z)$ puede ser prolongada analíticamente al recinto exterior respecto a la circunferencia de Apolonio $\left|\frac{z}{z-1}\right|=\rho$.

1084. Demuestre que la serie de potencias $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$ representa una función analítica en el círculo $|z|<1$ para la cual la circunferencia $|z|=1$ es su frontera natural (es decir, $f(z)$ es una función que no puede ser prolongada más alla del círculo unidad).

Sugerencia. Empleando la identidad $f(z)=z^2+z^4+\ldots+z^{2^k}+f(z^{2^k})$, demuestre que $f(t\zeta)\to\infty$ para $t\to 1$ $(0<t<1)$ y para cualquier punto de tipo $\zeta=\sqrt[2^k]{1}$ (k es un número natural).

En los problemas **1085** y **1086** demuestre que las funciones representadas por las series de potencias indicadas no pueden ser prolongadas más allá del círculo unidad.

1085. $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^{n!}$.

Sugerencia. Si p y q son números primos entre sí y $n\geqslant q$, se tiene

$$\left(re^{\frac{2p\pi i}{q}}\right)^{n!}=r^{n!}.$$

1086. $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n!}}{n^2}$.

Observación. En los problemas **1084—1086** se han considerado casos particulares del teorema general de Hadamard sobre las lagunas.

10 Зак. 1032

Si los índices de los coeficientes diferentes de cero de la serie de potencias $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ forman una sucesión $n_1, n_2, \ldots$ en la que $n_{k+1} > (1+\alpha) n_k$, donde $\alpha > 0$, *la frontera del círculo de convergencia de la serie es la frontera natural de la función* $f(z)$.

1087. Demuestre que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1-z^{n+1}} - \frac{1}{1-z^n} \right)$$

representa en los recintos $|z|<1$ y $|z|>1$ dos funciones analíticas que no son prolongación analítica una de la otra (véanse también los problemas **845—848**).

1088. Sean $f(z)$ y $\varphi(z)$ dos funciones enteras cualesquiera y sea $S(z)=\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-z^n}{1+z^n} - \frac{1-z^{n-1}}{1+z^{n-1}} \right)$. Demuestre que la expresión

$$\psi(z)=\frac{1}{2}\,[f(z)+\varphi(z)]+\frac{1}{2}\,S(z)\,[f(z)-\varphi(z)]$$

representa la función $f(z)$ en el recinto $|z|<1$ y la función $\varphi(z)$ en el recinto $|z|>1$.

1089. 1) Demuestre que siendo α un número real irracional la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n (z-e^{2\pi i n\alpha})}$ representa en los recintos $|z|<1$ y $|z|>1$ unas funciones analíticas para cada una de las cuales la circunferencia $|z|=1$ es la frontera natural.

Sugerencia. Demuestre que la suma de la serie crece sin límite cuando $z \to e^{2\pi i m\alpha}$ a lo largo de un radio vector.

Observación. Este problema es un caso particular del siguiente teorema general:

Sea L una curva, cerrada o no cerrada, con un radio de curvatura determinado en cada punto. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ converge absolutamente y los puntos a_1, $a_2, \ldots, a_n, \ldots$ pertenecen todos a la curva L de manera que cada arco finito de la curva L contiene siempre un conjunto infinito de estos puntos, la serie $F(z)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{a_n - z}$ representa una función analítica en cualquier recinto que no contiene puntos de la curva L y para el cual esta curva es una línea singular (véase *Goursat E.*, Cours d'analyse mathématique, Vol. II, cap. XVI, 7ª ed., Gauthier—Villars, Paris, 1949).

2) Demuestre que siendo α un número real racional, la serie del punto 1) representa una función racional.

1090. Demuestre que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z+n} \quad (n^z = e^{z \ln n})$$

converge para $\operatorname{Re} z > 1$ y que la recta $\operatorname{Re} z = 1$ es la frontera natural de su suma.

1091. Demuestre que la función $f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-m!\,z}$ es analítica para $\operatorname{Re} z > 0$ y que la recta $\operatorname{Re} z = 0$ es su frontera natural.

1092. Demuestre que la función $f(z)$ definida en el semiplano $\operatorname{Re} z > 0$ mediante la serie de Dirichlet $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$, donde $a_n = (-1)^{n+1}$, $\lambda_{2k-1} = 2k$ y $\lambda_{2k} = 2k + e^{-2k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, puede ser prolongada analíticamente al semiplano $\operatorname{Re} z > -1$.

Sugerencia. Represente $f(z)$ en la forma $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - e^{-ze^{-2k}}) e^{-2kz}$ y demuestre que en todo recinto finito $|1 - e^{-ze^{-2k}}| < Me^{-2k}$, donde M es una constante para el recinto considerado.

Observación. Este problema muestra que la suma de la serie de Dirichlet puede no tener puntos singulares sobre la recta que limita el semiplano de convergencia.

1093*. Prolongue analíticamente al semiplano $\operatorname{Re} s > -1$ la función $f(s)$ definida en el semiplano $\operatorname{Re} s > 0$ mediante la integral de Laplace

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} e^t \sin e^t \, dt.$$

1094. La función Gamma de Euler se define en el semiplano $\operatorname{Re} z > 0$ mediante la integral

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} \, dt \quad (t^{z-1} = e^{(z-1) \ln t}).$$

Integrando por partes el segundo miembro de esta igualdad, demuestre que la función $\Gamma(z)$ se prolonga analíticamente a todo el plano como una función meromorfa con polos simples $0, -1, -2, \ldots, -n, \ldots$ y que el residuo respecto al polo $-n$ es igual a $(-1)^n/n!$.

1095. Pruebe que la función Gamma puede ser prolongada analíticamente mediante la fórmula

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(z+n)} + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} \, dt.$$

Sugerencia. Sustituya la función e^{-t} en la integral $\int_0^1 e^{-t}t^{z-1}\,dt$ por su desarrollo en serie de potencias.

1096. En el problema **411** ha sido demostrado que para $0 < x < 1$

$$\int_0^\infty t^{x-1}\cos t\,dt = \Gamma(x)\cos\frac{\pi x}{2},$$

$$\int_0^\infty t^{x-1}\,\text{sen}\,t\,dt = \Gamma(x)\,\text{sen}\frac{\pi x}{2}.$$

¿En qué recintos del plano z serán válidas las fórmulas indicadas?

1097. Demuestre que $\Gamma(z)$ puede ser prolongada a todo el recinto de existencia mediante la fórmula

$$\Gamma(z) = \frac{i}{2\,\text{sen}\,\pi z}\int_C e^{-w}(-w)^{z-1}\,dw \quad ((-w)^{z-1} = e^{(z-1)\ln(-w)}),$$

donde el contorno C se compone del corte a lo largo de la parte positiva del eje real y el origen de coordenadas se recorre en la dirección contraria a la del movimiento de las agujas del reloj.

1098. Sea $\zeta(z)$ la función Zeta de Riemann (véase el problema **844**)

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z} \quad (\text{Re}\,z > 1).$$

Demuestre que $\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)}\int_0^\infty \frac{w^{z-1}}{e^w - 1}\,dw$ para $\text{Re}\,z > 1$ y obtenga de aquí la prolongación analítica de la función $\zeta(z)$ a todo el plano, a excepción del punto $z = 1$; analice el carácter de la singularidad de la función $\zeta(z)$ en el punto $z = 1$.

Sugerencia. Para la prolongación analítica considere la integral $\int_C \frac{(-w)^{z-1}}{e^w - 1}\,dw$, donde C es el contorno del problema **1097**.

1099*. Sea $f(z)$ una función desarrollable en una serie de potencias $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ de radio de convergencia $R = 1$. Designemos mediante $\varphi(z)$ la suma de la serie $\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n z^n}{n!}$ (la función $\varphi(z)$ es la función conjugada de $f(z)$ según Borel y es una función entera, véase el problema **535**).

Demuestre que para $|z| < 1$ tiene lugar la igualdad

$$\int_0^\infty e^{-t}\varphi(zt)\,dt = f(z).$$

Demuestre también que la función $\int_0^\infty e^{-t}\varphi(zt)\,dt$ ofrece la prolongación analítica de la función $f(z)$ al recinto G definido del modo siguiente: a través de cada punto singular de la función $f(z)$ se traza una recta perpendicular al segmento que une este punto con el origen de coordenadas; G es el recinto convexo que contiene el círculo $|z| < 1$ y cuya frontera se compone de los puntos de las rectas descritas; si el número de estas rectas es finito, G es un polígono (método de prolongación de Borel).

1100. Verifique el método de prolongación de Borel para las series siguientes:

1) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2n}$; 3) $\sum_{n=0}^{\infty} z^{4n}$.

1101. Sea en la integral de tipo de Cauchy $F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}$ C un contorno cerrado simple y sea $\varphi(\zeta)$ una función continua a lo largo de C. Demuestre: para que una de las funciones $F^+(z)$ y $F^-(z)$ (véase la pág. 130) sea una prolongación analítica de la otra a través de un arco $\gamma \in C$, es necesario y suficiente que $f(z) \equiv 0$ sobre el arco γ.

1102. Demuestre que, si la función $\varphi(\zeta)$ no es analítica[1] en ningún punto de un arco simple no cerrado C, todos los puntos del arco C son singulares para la integral de tipo de Cauchy $\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}$.

Sugerencia. Parta de las fórmulas de Sojotski para los valores frontera de la integral de tipo de Cauchy.

1103. Sea γ un contorno simple cerrado recorrido en la dirección positiva y compuesto por los arcos γ_1 y γ_2 con puntos extremos comunes z_1 y z_2 (fig. 31), sea G^+ el recinto interior de γ y sea G^- el recinto exterior de γ.

Sea, además,

$$F(z) = \int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z},$$

donde $\varphi(\zeta) = a$, si $\zeta \in \gamma_1$, $\varphi(\zeta) = b$, si $\zeta \in \gamma_2$ (a y b son constantes complejas).

---

[1] Es decir, no existe una función analítica que coincida con $\varphi(\zeta)$ a lo largo de algún arco perteneciente a C.

Halle las funciones $F^+(z)$ y $F^-(z)$ y prolongue analíticamente la función $F^-(z)$ al recinto G^+:

1) a través del arco γ_1; 2) a través del arco γ_2.

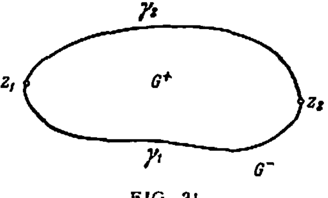


FIG. 31

1104. Sea G un recinto biconexo comprendido entre el contorno interior γ y el contorno exterior Γ y sea $\varphi(z)$ una función analítica en el recinto cerrado $G+\gamma+\Gamma$.

Demuestre que la función

$$\varphi(z)-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta$$

puede ser prolongada analíticamente a todo el exterior del contorno γ y que la función

$$\varphi(z)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta$$

puede ser prolongada analíticamente a todo el interior del contorno Γ. Los contornos γ y Γ *se recorren en la dirección contraria a la* del movimiento de las agujas del reloj.

§ 2. PUNTOS SINGULARES DE CARÁCTER MULTIFORME. SUPERFICIES DE RIEMANN[1]

Un punto de ramificación aislado $z=a$ de orden $k-1$ (k es un número natural, $k\geqslant 2$) de una función $w(z)$ se caracteriza por la existencia de una *rama de $w(z)$ que en una vecindad del punto $z=a$ admite la representación*

$$w=\sum_{-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^{\frac{n}{k}}\quad(a\neq\infty)$$

o la representación

$$w=\sum_{-\infty}^{\infty}c_nz^{-\frac{n}{k}}\quad(a=\infty).$$

---

[1] En relación con este parrágrafo véase [I, cap. VIII, § 6]; *В.В. Голубев*, Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, Гостехиздат, 1951 (*Gólubiev V. V.*, Lecciones sobre la teoría analítica de ecuaciones diferenciales). *Nevanlinna R.*, Uniformisierung, Springer, Berlin, 1953.

Si sólo un número finito de coeficientes c_n de índices negativos es diferente de cero, el punto $z=a$ (o bien $z=\infty$) se llama *punto algebraico de ramificación* (p. a. r.). En el caso contrario, el punto correspondiente se llama *punto trascendente de ramificación* (punto singular esencial de carácter multiforme).

Sobre un mismo punto del z—plano la función $w(z)$ puede tener a lo sumo un conjunto numerable de diferentes puntos algebraicos y trascendentes de ramificación, de puntos regulares y de puntos singulares de carácter uniforme. En la superficie de Riemann de la función $w(z)$ sobre el z—plano estos puntos tienen vecindades que no se intersecan entre sí.

En cada vecindad de esta índole w es una función uniforme del parámetro local t:

$$w=\sum_{n=-N}^{\infty} c_n t^n,$$

donde

$$t=\begin{cases}(z-a)^{\frac{1}{k}} & (a\neq\infty),\\ z^{-\frac{1}{k}} & (a=\infty).\end{cases}$$

Los puntos logarítmicos de ramificación (p. l. r.) son aquellos puntos $z=a$ o $z=\infty$ para los cuales existe una rama de $w(z)$ que admite una prolongación indefinida analítica al recinto $0<|z-a|<r$ ($R<|z|<\infty$, respectivamente) y que es en él multiforme infinitamente. Esta rama de $w(z)$ en una vecindad del p. l. r. se convierte en una función analítica uniforme al pasar al parámetro $t=\operatorname{Ln}(z-a)$, $\operatorname{Re} t<\rho$ ($t=\operatorname{Ln} z$, $\operatorname{Re} t>\rho$, respectivamente). Debe tenerse en cuenta que en la superficie de Riemann sobre un mismo punto z, además de diferentes p. l. r., pueden encontrarse también otros puntos de carácter tanto uniforme como multiforme.

1105. Analice para qué valores de z los valores de $w(z)$ coinciden en todas las hojas de su superficie de Riemann sobre el z—plano, si:

1) $w=(z^2-9)\sqrt{z}$; 2) $w=\operatorname{sen} z+(z^2+4)\operatorname{Ln} z$;

3) $w=\operatorname{sen} z+(z^2+4)^2\operatorname{Ln} z$.

¿Coinciden en estos mismos puntos los valores de $w'(z)$?

1106. Verifique que para cada una de las funciones:

1) $w=z\sqrt{z}$, 2) $w=z^2\operatorname{Ln} z$, $w(0)=0$,

existe en el punto $z=0$ la primera derivada que, además, es igual para todas las ramas, mientras que la segunda derivada finita no existe.

En los problemas 1107—1115 desarrolle cada una de las funciones indicadas $w(z)$ en serie de potencias del parámetro local t en las vecindades de todos los puntos de su superficie de Riemann situados sobre los z—puntos dados; indique los recintos de convergencia de las series obtenidas.

1107. $w=\dfrac{1}{1+\sqrt{2-z}}$, $z=1$, $z=2$.

1108. $w=\sqrt{\sqrt{z-1}-2}$, $z=1$, $z=5$, $z=\infty$.

1109. $w=\sqrt{1+\sqrt{z-1}}$, $z=1$, $z=2$, $z=\infty$.

1110. $w=\sqrt[3]{1+\sqrt{z-1}}$, $z=1$, $z=2$, $z=\infty$.

1111. $w=\sqrt{(\sqrt{z}-a)(\sqrt{z}-b)}$, $z=\infty$ $(a\neq b)$.

1112. $w=e^{\frac{1}{\sqrt{z}}}$, $z=0$. 1113. $w=\frac{\operatorname{sen}\sqrt{z}}{z^2}$, $z=0$.

1114. $w=\operatorname{ctg}\sqrt[3]{z}$, $z=0$. 1115. $w=\sqrt{\operatorname{sen} z}$, $z=0$.

En los problemas 1116—1122 se requiere hallar los puntos del z-plano sobre los cuales existe al menos un punto singular de la función multiforme dada, así como indicar el carácter de todos los puntos de la superficie de Riemann situados sobre cada uno de estos puntos del z-plano.

1116. $\operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt{z-1}}$. 1117. $\operatorname{sen}\frac{1}{1+\sqrt{z}}$. 1118. $\frac{1}{\operatorname{sen}\frac{1}{1+\sqrt{z}}}$.

1119. $\frac{1}{\operatorname{sen}\sqrt{z}}$. 1120. $\sqrt[3]{\sqrt{z}+\sqrt{2-z}}$.

1121. $\operatorname{tg}(i\operatorname{Ln} z)$. 1122. $\operatorname{tg}\left(\frac{i}{4}\operatorname{Ln} z\right)$.

Si la función $w=f(z)$ es uniforme y su función inversa $z(w)$ es multiforme, para hallar los puntos algebraicos de ramificación de la función $z(w)$ es necesario hallar los ceros de $f'(z)$ y los polos múltiples de $f(z)$ y estudiar el comportamiento de $f(z)$ en el infinito. Resulta que al punto $z_0\neq\infty$ corresponde un p.a.r. de orden $k-1$ de la función $z(w)$, si el desarrollo de Laurent de la función $f(z)$ en una vecindad de z_0 es o bien de la forma

$$f(z)=w_0+\sum_{n=k}^{\infty}c_n(z-z_0)^n \quad (c_k\neq 0)$$

o bien de la forma

$$f(z)=\sum_{n=-k}^{\infty}c_n(z-z_0)^n \quad (c_{-k}\neq 0).$$

Si $z_0=\infty$, estos desarrollos deben ser de la forma

$$f(z)=\sum_{n=k}^{-\infty}c_nz^n \quad (c_k\neq 0)$$

o

$$f(z)=w_0+\sum_{n=-k}^{-\infty}c_nz^n \quad (c_{-k}\neq 0).$$

En los problemas **1123—1129** determine las singularidades de $z(w)$, si w es la función dada

1123. $w=z(1-z)$. 1124. $w=z^3-3z$. 1125. $w=\frac{z}{(1+z)^2}$.

1126. $w=\left(\frac{z}{1-z}\right)^2$. 1127. $w=\frac{z-a}{z^2-1}$ $(0<a<1)$.

1128. $w = P_n(z)$ (polinomio de n-ésimo grado).

1129. $w = R(z)$ (función racional).

En los problemas **1130—1138** analice la transformación que realiza la función $w(z)$, construya la superficie de Riemann R sobre el w-plano y divida el z-plano en recintos correspondientes a las hojas o semihojas de R.

1130. $w = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$. Considere el caso límite $n \to \infty$.

1131. $w = \left(\frac{z-a}{z-b}\right)^n$. **1132.** $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$. **1133.** $w = \frac{z}{(1-z)^2}$.

1134. $w = \frac{1}{2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right)$. Halle el grupo de transformaciones lineales respecto al cual la función w es invariante y explique qué transformaciones de la superficie de Riemann corresponden a las transformaciones del grupo.

1135. $w = \frac{z}{(1+z^n)^2}$. **1136.** $w = z - \frac{z^n}{n}$. **1137.** $w = \frac{1}{z} + \frac{z^n}{n}$.

1138. $w = T_n(z) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos z)$, $n \geqslant 1$ ($T_n(z)$ son los polinomios de Chébyshev).

En los problemas **1139—1142** halle las singularidades de las funciones inversas a las dadas.

1139. $w = e^{\frac{1}{z}}$. **1140.** $w = e^{t\left(z - \frac{1}{z}\right)}$ (t es un número complejo).

1141. $w = \cos z + \operatorname{sen} z$. **1142.** $w = \frac{\operatorname{sen} z}{z}$.

En los problemas **1143—1151** construya las superficies de Riemann sobre el w-plano.

1143. $w = \cos z$. **1144.** $w = \operatorname{sen} z$. **1145.** $w = \operatorname{tg} z$.

1146. $w = \operatorname{ctg} z$. **1147.** $w = \operatorname{ch} z$. **1148.** $w = \operatorname{sh} z$.

1149. $w = \operatorname{th} z$. **1150.** $w = \operatorname{cth} z$. **1151.** $w = z + e^z$.

1152. Considerando dada la superficie de Riemann sobre el w-plano de una función racional $w = R(z)$, construya las superficies de Riemann de la función $z(w)$, si: 1) $w = R(e^z)$; 2) $w = R(\operatorname{sen} z)$;

En los problemas **1153—1158** construya las superficies de Riemann (sobre el z-plano) de las funciones dadas.

1153. 1) $w = \sqrt{(z-a)(z-b)}$; 2) $w = \sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)}$;

3) $w = \sqrt{\prod_{k=1}^{n} (z - a_k)}$ (considere por separado los casos de n par e impar)

1154. 1) $w = \sqrt[3]{z-a}$; 2) $w = \sqrt[3]{(z-a)(z-b)}$;

3) $w = \sqrt[3]{(z-a)(z-b)(z-c)}$; 4) $w = \sqrt[3]{\prod_{k=1}^{n} (z - a_k)}$, $n > 3$.

1155. $w=\sqrt[n]{(z-a)(z-b)(z-c)}$, $n>3$.

1156. $w=\sqrt[3]{\frac{z-a}{(z-b)^2}}+\sqrt{z-c}$.

1157. $w=\sqrt{\sqrt[3]{z}-1}$. 1158. $w=\sqrt{\operatorname{sen} z}$.

En los problemas 1159—1164 analice las transformaciones y construya las superficies de Riemann de las funciones algebraicas $w(z)$ y $z(w)$.

1159. $w^2+z^2=1$. 1160. $w^2=\frac{z}{(1-z)^2}$.

Sugerencia. Haga uso de la solución del problema 1133.

1161. $w^3+z^3-3wz=0$.

Sugerencia. Haga uso de la representación paramétrica

$$z=\frac{3t}{1+t^3},\quad w=\frac{3t^2}{1+t^3}.$$

1162. $w^2=\frac{z^3}{1-z}$.

Sugerencia. Haga uso de la representación paramétrica

$$z=\frac{t^2}{1+t^2},\quad w=\frac{t^3}{1+t^2}.$$

1163. $w^2=z^2\frac{1+z}{1-z}$.

Sugerencia. Tome $z=\frac{t^2-1}{t^2+1}$, $w=t\frac{t^2-1}{t^2+1}$.

1164. $w^n=\frac{z^n}{(1+z^n)^2}$.

Sugerencia. Considere por separado los casos de n par e impar.

Si $z=a$ es un punto singular para una de las ramas $f(z)$ de la función $w(z)$, se llama *recinto de indeterminación* de $f(z)$ en el punto $z=a$ al conjunto de los valores frontera de $f(z)$ que se obtienen de sus valores en una vecindad de $z=a$ sobre $|z-a|<r$ para $r\to 0$. Para los p. a. r. y los polos el recinto de indeterminación consta de un punto. Si la función es uniforme y el punto a es un punto singular esencial aislado, entonces, según el teorema de Sojotski — Cassorati—Weierstrass, el recinto de indeterminación cubre todo el plano (véase también el problema 618). Para puntos trascendentes y logarítmicos de ramificación, así como para puntos singulares no aislados, el recinto de indeterminación puede tener una estructura más compleja (véase el libro: *В. В. Голубев*, Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, Гостехиздат, 1951 (*Gólubiev V. V.*, Lecciones sobre la teoría analítica de ecuaciones diferenciales), cap. I, § 7.

En los problemas 1156—1176 determine las singularidades de las funciones y halle los recintos de indeterminación en los puntos trascendentes y logarítmicos de ramificación.

1165. $w=(\sqrt[6]{z})^4$. 1166. $w=(\sqrt[m]{z})^n$ (n y m son numeros naturales).

1167. $w=e^{\frac{1}{\sqrt{z}-1}}$. 1168. $w=\frac{\operatorname{sen}\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$. 1169. $w=\operatorname{tg}\frac{1-\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}}$.

1170. $w=e^{(\operatorname{Ln} z)^n}$ (n es un número entero). 1171. $w=z^i=e^{i \operatorname{Ln} z}$.

1172. $w=\operatorname{sen}\operatorname{Ln} z$. 1173. $w=\frac{1}{z}\operatorname{Ln}\frac{1}{1-z}$. 1174. $w=z+\operatorname{Ln} z$.

1175. $w=\frac{1}{z}\operatorname{Arc\,sen} z$. 1176. $w=\frac{1}{z^2}+\operatorname{Arctg} z$.

En los problemas 1177—1180 construya las superficies de Riemann de las funciones dadas.

1177. $w=z^a$ (a es un número complejo).

1178. $w=\operatorname{Ln}[(z-a)(z-b)]$.

1179. $w=\operatorname{Ln}[(z-a)(z-b)(z-c)]$. 1180. $w=\operatorname{Ln}\operatorname{sen} z$.

1181. Sea $\zeta=\varphi(z)$ una función analítica uniforme o multiforme, sea $R_{z,\varphi}$ su superficie de Riemann sobre el z-plano y sea $w=f(\zeta)$ una función analítica uniforme definida en el recinto G_ζ. ¿En qué recintos de $R_{z,\varphi}$ cada una de las expresicnes indicadas:

1) $w(z)=f[\varphi(z)]$, 2) $w(z)=f(z)+\varphi(z)$, 3) $w(z)=f(z)\varphi(z)$

define una función analítica única?

Considere, en particular, el caso en que φ es una función algebraica o inversa a una meromorfa y f es una función racional o trascendente meromorfa.

En los problemas 1182—1219 explique cuáles de las iunciones dadas $w(z)$ se descomponen en diferentes funciones analíticas y cuáles no se descomponen; determine también sus singularidades y construya, donde se indica, las superficies de Riemann (n y m son números naturales).

1182. $w=\sqrt{z^2}$ (compare con $(\sqrt{z})^2$).

1183. $w=\sqrt[6]{z^4}$ (compare con $(\sqrt[6]{z})^4$.

1184. $w=\sqrt[n]{z^m}$ (compare con $(\sqrt[n]{z})^m$).

1185. $w=\sqrt[n]{e^z}$. 1186. $w=\sqrt[n]{\operatorname{sen} z}$. 1187. $w=\operatorname{Ln} z^i$.

1188. $w=\operatorname{Ln} e^z$. 1189. $w=\operatorname{Ln}\left(z-\frac{1}{z}\right)$.

1190. $w=\operatorname{Ln}(e^z-1)$. Construya la superficie de Riemann.

1191. $w=\operatorname{Ln}\operatorname{sen} z$. Construya la superficie de Riemann.

1192. $w=\operatorname{Ln}\operatorname{tg} z$. Construya la superficie de Riemann.

1193. $w=\operatorname{Arccos}(\cos z)$ (compare con $\cos(\operatorname{Arccos} z)$).

1194. $w=\operatorname{Arctg}(\operatorname{tg} z)$ (compare con $\operatorname{tg}(\operatorname{Arctg} z)$).

1195. 1) $w=(z^{r_1})^{r_2}$ (r_1 y r_2 son números racionales). Compare con $(z^{r_2})^{r_1}$. Considere, en particular, $r_1=\frac{2}{3}$ y $r_2=\frac{3}{2}$; 2) $w=z^{r_1}z^{r_2}$; 3) $w=z^{r_1}+z^{r_2}$.

1196. $w=\sqrt[n]{z}\,\sqrt[m]{1-z}$. 1197. $w=\sqrt[n]{\sqrt[m]{z}-1}$.

1198. $w=\frac{\sqrt{z}}{\sqrt[4]{z+1}}$. 1199. $w=\sqrt[n]{\operatorname{Ln} z}$. Construya la superficie de Riemann.

1200. $w=\operatorname{Ln}\operatorname{Ln} z$. Construya la superficie de Riemann.

1201. $w=[\operatorname{Ln}(z-1)]^i$.

1202. $w=\sqrt[n]{\operatorname{Arcsen} z}$. Construya la superficie de Riemann.

1203. $w=\operatorname{Arcsen}\operatorname{Ln} z$. Construya la superficie de Riemann.

1204. $w=\operatorname{Ln}(\sqrt[n]{z-1})$. Construya la superficie de Riemann.

1205. $w=\operatorname{Ln}\frac{1-\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}}$. 1206. $w=\operatorname{Arcsen}\frac{\sqrt{z}}{1+z}$.

1207. $w=\operatorname{Ln} z^{\alpha}$ (α es un número real).

1208. $w=\sqrt{z}+\operatorname{Ln} z$. Construya la superficie de Riemann.

1209. $w=\operatorname{Ln} z+\operatorname{Ln} z$. 1210. $w=\operatorname{Arcsen} z+\operatorname{Arccos} z$.

1211. $w=\operatorname{Arctg} z+\operatorname{Arcctg} z$. 1212. $w=\operatorname{Arth} z-\operatorname{Arcth} z$.

1213. Construya la superficie de Riemann de la función $w=(\operatorname{Ln} z)^i$ y analice los conjuntos de los valores frontera de w para un p. l. r. sobre el punto $z=0$ que se obtienen cuando:
1) $r\to 0$, $\varphi=\text{const}$; 2) $r\to 0$, $\alpha<\varphi<\beta$; 3) $r=\text{const}$, $\varphi\to\pm\infty$; 4) $r\to 0$, $\varphi\to\pm\infty$.

1214. Sea $\chi(z)$ una función analítica uniforme en el círculo $|z|<1$ que no puede ser prolongada más allá de la circunferencia $|z|=1$.

Analice para qué valores de a las funciones indicadas se descomponen en diferentes funciones analíticas y para qué valores no se descomponen.

1) $w=\chi(z)+\sqrt[n]{z-a}$; 2) $w=\chi(z)\operatorname{Ln}(z-a)$;
3) $w=\chi(a+z^n)$; 4) $w=\chi(a+e^z)$.

1215. Analice el problema de descomposición de las funciones:
1) $w=\sqrt[n]{\zeta-a}$, 2) $w=\operatorname{Ln}(\zeta-a)$ donde $\zeta=\chi^{-1}(z)$ y χ es la función del problema 1214.

1216. Analice el comportamiento de diferentes funciones analíticas definidas mediante las igualdades:
1) $w=\chi(z)(\operatorname{Ln} z)^i$; 2) $w=\chi(z)[\operatorname{Ln}(z-1)]^i$, donde $\chi(z)$ es la función del problema 1214.

Halle, en particular, los recintos de indeterminación en una vecindad de los p. l. r.

Sugerencia. Haga uso de la solución del problema 1213.

1217. Sea $f(z)$ una función entera.
Construya las superficies de Riemann de las funciones:
1) $w=\sqrt{f(z)}$; 2) $w=\operatorname{Ln} f(z)$;
3) $w[f(z)]^{\alpha}$ (α es un número irracional).

1219. Construya la superficie de Riemann de la función

$$w=\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}}.$$

1219. Sea $f(z)=z+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2^n}+2}{(2^n+1)(2^n+2)}$. Construya las superficies de Riemann de las funciones

1) $w=\sqrt{f(z)}$; 2) $w=\operatorname{Ln} f(z)$; 3) $w=\operatorname{Ln} f\left(\frac{z}{2}\right)+\operatorname{Ln} f\left(\frac{1}{2z}\right)$.

Sugerencia. Demuestre previamente que la función $f(z)$ es de una hoja en el círculo $|z|<1$ y que tiene la circunferencia $|z|=1$ como su frontera natural.

CAPITULO IX

TRANSFORMACIONES CONFORMES (CONTINUACION)

§ 1. FORMULA DE CHRISTOFFEL — SCHWARZ [1]

Sea P un polígono acotado del w-plano, sean A_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ sus vértices, dispuestos en el orden del recorrido positivo de P respecto a su interior, y sean $\alpha_k\pi$ sus ángulos interiores $\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k=n-2\right)$. La función $w=f(z)$, que transforma el semiplano superior $\operatorname{Im} z>0$ en el interior del polígono P, se determina mediante la fórmula de Christoffel — Schwarz:

$$w=f(z)=C\int_0^z\prod_{k=1}^{n}(z-a_k)^{\alpha_k-1}\,dz+C_1. \tag{1}$$

donde $-\infty<a_1<a_2<\ldots<a_n<\infty$ son los puntos del eje x correspondientes a los vértices $A_1, A_2, \ldots, A_n$ del polígono P; C y C_1 son constantes complejas.

En la fórmula (1) figuran los puntos a_k, que son las imágenes de los vértices dados A_k del polígono y que deben ser determinados, y las constantes C y C_1. De los n puntos a_k tres se pueden escoger arbitrariamente, ya que mediante una transformación homográfica del semiplano superior en sí mismo pueden ser transformados en los tres puntos dados. La determinación de los restantes $n-3$ puntos y de las constantes complejas C y C_1 (es decir, de un total de $n+1$ parámetros *reales*) constituye la dificultad principal al aplicar en la práctica la fórmula (1). En un principio, los parámetros incógnitos pueden ser hallados de las consideraciones siguientes. La longitud l_i del lado A_iA_{i+1} $(i=1, 2, \ldots, n-1)$ es igual a

$$l_i=\int_{a_i}^{a_{i+1}}|f'(x)|\,dx=|C|\int_{a_i}^{a_{i+1}}\prod_{k=1}^{n}|x-a_k|^{\alpha_k-1}\,dx.$$

La longitud l_n del lado A_nA_1 es igual a

$$l_n=|C|\left[\int_{a_n}^{\infty}\prod_{k=1}^{n}|x-a_k|^{\alpha_k-1}\,dx+\int_{-\infty}^{a_1}\prod_{k=1}^{n}|x-a_k|^{\alpha_k-1}\,dx\right].$$

[1] En relación con este parágrafo véase [1, capítulo VIII, § 7], [2, capítulo II, § 3] y *W. Koppenfels* und *F. Stallmann*, Praxis der Konformen Abbildung, Springer—Verlag, Berlin, Göttingen Heidelberg, 1959 (este libro contiene también un catálogo de transformaciones de diferentes tipos de polígonos).

Formando las razones de las longitudes de $n-3$ lados con una de los tres restantes, obtenemos $n-3$ ecuaciones independientes para la determinación de $n-3$ puntos a_k. Entonces, la función $t=\int\limits_0^z \prod\limits_{k=1}^{n} (z-a_k)^{\alpha_k-1}\,dz$ determinará la transformación del semiplamo superior en un polígono P' del t-plano semejante al dado. Después construimos la transformación lineal $w=Ct+C_1$ que transforma P' en P.

La transformación del semiplano superior en el exterior del mismo polígono se realiza mediante la función

$$F(z=C)\int\limits_0^z \prod_{k=1}^{n} (z-a'_k)^{\beta_k-1}\,\frac{dz}{(z-b)^2(z-\bar{b})^2}+C_1, \qquad (2)$$

donde b es el punto del semiplano superior que corresponde al punto infinito del w-plano; a'_k son los puntos correspondientes a los vértices A_k del polígono (ahora $\infty > a'_1 > a'_2 > \ldots > a'_k > -\infty$) y $\beta_k\pi$ son los ángulos exteriores del polígono

$$\left(\beta_k=2-\alpha_k, \quad \sum_{k=1}^{n}\beta_k=n+2\right).$$

1220. Demuestre que, si uno de los vértices del polígono es la imágen del punto infinito, por ejemplo, $a_n=\infty$, la función transformadora es de la forma $f(z)=C\int\limits_a^z \prod\limits_{k=1}^{n-1} (z-a_k)^{\alpha_k-1}\,dz+C_1$.

Sugerencia. Realice la transformación $\zeta=-\frac{1}{z}$, si todos los $a_k\neq 0$, y $\zeta=-\frac{1}{z-a}$, donde $a\neq a_k$, si uno de los puntos $a_k=0$ $(k=1, 2, \ldots, n-1)$.

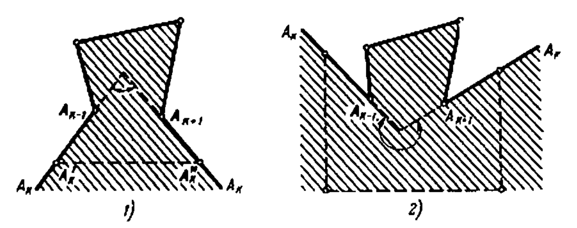


FIG. 32

1221. Demuestre que, si uno o varios vértices A_k se encuentran en el ∞, la fórmula (1) sigue siendo válida, siempre que por $\alpha_k\pi$ se comprenda el ángulo entre los rayos correspondientes en el punto finito de intersección de los mismos, tomado con el signo *menos*.

Sugerencia. Sea $A_k=\infty$. Si $\alpha_k<1$, considere el polígono P' cortado de P por el segmento $A'_kA''_k$, donde A'_k y A''_k se hallan lo suficientemente lejos en los lados $A_{k-1}A_k$ y $A_{k+1}A_k$ (fig. 32,1) y en la fórmula (1) para P' pase al límite

$A'_k \to \infty$, $A''_k \to \infty$. Si $\alpha_k \geq 1$, una $A'_k A''_k$ mediante una quebrada perteneciente a P (véase la fig. 32,2) y aléjela al infinito, ampliándola semejantemente.

1222. Determine las magnitudes α_k, que figuran en la fórmula (1) para los vértices infinitamente alejados de los "polígonos" formados por rayos paralelos y representados en la fig. 33.

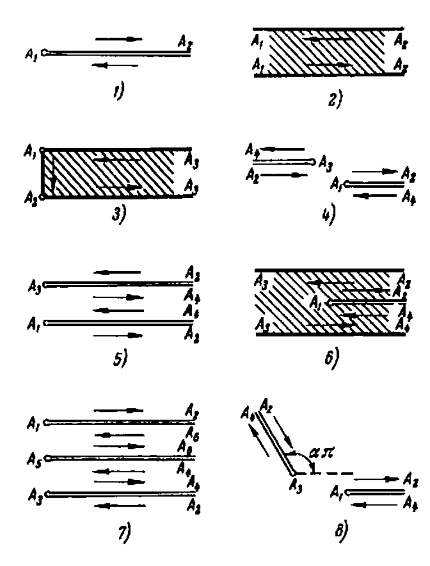


FIG. 33

Sugerencia. Pase al límite análogamente a lo recomendado en el problema 1221.

1223. 1) Demuestre que la función que transforma el círculo unidad $|z| < 1$ en un polígono P, situado en una parte finita del plano, es de la forma.

$$f(z) = C \int_0^z \prod_{k=1}^{n} (z - a_k)^{\alpha_k - 1} \, dz + C_1,$$

donde $a_k = e^{i\varphi_k}$ $(\varphi_1 < \varphi_2 < \ldots < \varphi_n)$ son los puntos de la circunferencia $|z| = 1$ correspondientes a los vértices A_k recorridos en la dirección positiva y $\alpha_k \pi$ son los ángulos interiores del polígono P.

2) Demuestre que la función que transforma el círculo unidad $|z| < 1$ en el exterior del mismo polígono P de manera que el

punto $z=0$ se transforma en el punto $w=\infty$ es de la forma

$$f(z)=C\int_{1}^{z}\prod_{k=1}^{n}(z-a'_k)^{\beta_k-1}\frac{dz}{z^2},$$

donde $a'_k=e^{i\varphi'_k}$ $(\varphi'_1>\varphi'_2>\ldots>\varphi'_k)$ y $\beta_k\pi$ son los ángulos exteriores de P.

1224. Halle todos los casos de inversión uniforme de la fórmula de Christoffel—Schwarz (1), es decir, explique para qué polígonos P la función inversa $z=z(w)$ resulta definida y es uniforme en todo el w-plano.

Sugerencia. Los polígonos, que se obtienen de P mediante un número par de reflexiones espaculares en sus lados, deben enlosar todo el w-plano sin vacíos ni superposiciones.

En los problemas **1225—1227** transforme el semiplano superior $\operatorname{Im} z>0$ en los recintos indicados P del w-plano observando la correspondencia dada entre los vértices de P y los puntos del eje real. Determine también el período o los períodos de la función inversa $z(w)$, el grupo G de sus transformaciones lineales invariantes del w-plano y el recinto fundamental B de este grupo (véase la pág. 38).

1225. 1) P es la franja $0<v<h$; $w(-\infty,\infty)\to z(0,\infty)$[1].
2) P es la franja $0<v<h$; $w(-\infty,\infty)\to z(-1,1)$.

1226. P es la semifranja $0<u<\pi$, $v<0$; $w(0,\pi,-i\infty)\to$ $\to z(1,-1,\infty)$.

1227. 1) P es un triángulo rectángulo de ángulos agudos $\frac{\pi}{3}$ y $\frac{\pi}{6}$; $w\left(0,\omega,\omega+\frac{i\omega}{\sqrt{3}}\right)\to z(0,1,\infty)$.

2) P es un triángulo isósceles;

$$w(0,\omega,\omega+i\omega)\to z(0,1,\infty).$$

3) P es un triángulo equilátero:

$$w\left(0,\omega,\omega\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\to z(0,1,\infty).$$

1228. Halle los recintos del plano w en los que la función

$$w(z)=\int_{0}^{z}t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt$$

$$(\arg w'(x)=0,\ \text{para}\ 0<x<1)$$

transforma el semiplano superior $\operatorname{Im} z>0$, si:

---

[1] Aquí y en lo sucesivo el símbolo $w(A,B,\ldots)\to z(a,b,\ldots)$ representa la correspondencia de puntos del w- y del z-planos: $A\longleftrightarrow a$, $B\longleftrightarrow b,\ldots$

1) $0<\alpha\leqslant 2$, $0<\beta\leqslant 2$; considere los casos: a) $\alpha+\beta<1$, b) $\alpha+\beta=1$, c) $\alpha+\beta>1$, en particular, $\alpha+\beta=2$ y $\alpha=\beta=\frac{3}{2}$.

2) $1\leqslant\alpha\leqslant 2$, $-1\leqslant\beta\leqslant 0$, $\alpha+\beta\geqslant 1$; considere los casos: a) $\alpha=1$, $\beta=0$, b) $\alpha+\beta=1$, c) $\alpha=2$, d) $\alpha=2$, $\beta=-\frac{1}{2}$, e) $\alpha=2$, $\beta=-1$.

1229. 1) Halle los recintos del plano w en los que la función

$$w(z)=\int_0^z \frac{t-\lambda}{\sqrt{t(t-1)}}\,dt=\sqrt{z(z-1)}+$$
$$+(1-2\lambda)\left[\ln(\sqrt{z}+\sqrt{z-1})-\frac{i\pi}{2}\right]$$

transforma el semiplano superior. Considere los casos: $\lambda<0$, $0<\lambda<\frac{1}{2}$, $\lambda=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}<\lambda<1$ y $\lambda>1$.

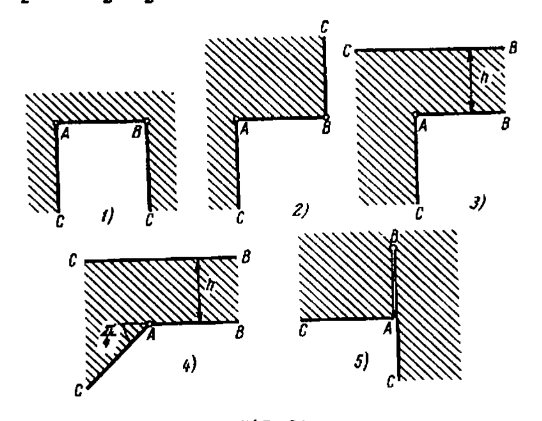


FIG. 34

2) Halle los recintos del plano w en los que la función

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_1^z \frac{t-\lambda}{\sqrt{t(t-1)}}\frac{dt}{t}=\frac{1}{\pi i}\left[\ln(\sqrt{z}+\sqrt{z-1})-\lambda\sqrt{\frac{z-1}{z}}\right]$$

transforma el semiplano superior. Considere los casos: $\lambda<0$, $0<\lambda<1$ y $\lambda>1$.

1230. Transforme el semiplano superior $\operatorname{Im} z>0$ en los recintos del w-plano indicados en la fig. 34, con la correspondencia de puntos dada.

1) $w(A=0,\ B=1,\ C=\infty) \to z(0,\ 1,\ \infty)$;
2) $w(A=0,\ B=1,\ C=\infty) \to z(0,\ 1,\ \infty)$;
3) $w(A=0,\ B=\infty,\ C=\infty) \to z(0,\ 1,\ \infty)$;
4) $w(A=0,\ B=\infty,\ C=\infty) \to z(0,\ 1,\ \infty)$;
5) $w(A=0,\ B=ia,\ C=\infty) \to z(0,\ 1,\ \infty)$.

1231. Transforme el semiplano superior $\operatorname{Im} z > 0$ en los recintos del w-plano indicados en la fig. 35 ($0 < \vartheta < 1$).
1) $w(A,\ B=0,\ C=\infty) \to z(0,\ 1,\ \infty)$;
2) $w(A,\ B=0,\ C=\infty) \to z(0,\ 1,\ \infty)$.

En el caso en que ϑ sea un número racional ($\vartheta = p/q$), exprese las integrales obtenidas mediante funciones elementales.

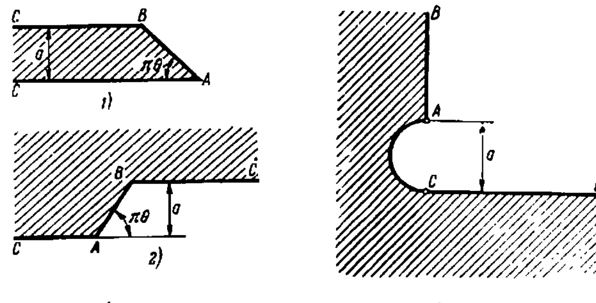


FIG. 35 FIG. 36

1232. Transforme el semiplano superior en el recinto indicado en la fig. 36 (el arco AC es una semicircunferencia)

$$w(A=ai,\ B=\infty,\ C=0) \to z(0,\ 1,\ \infty).$$

Sugerencia. Mediante la transformación $\zeta = \frac{a}{w}$ se reduce a un caso particular del problema 1231, 2).

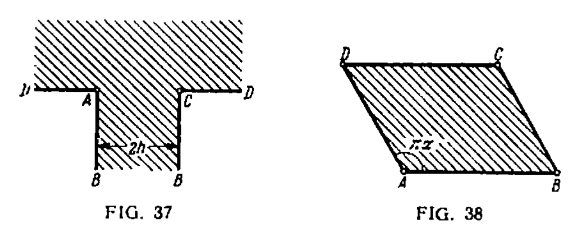


FIG. 37 FIG. 38

1233. Transforme el semiplano superior $\operatorname{Im} z > 0$ en el recinto del w-plano indicado en la fig. 37, con la condición

$$w(A=-h,\ B=\infty,\ C=h,\ D=\infty) \to z(-1,\ 0,\ 1,\ \infty).$$

(La posibilidad de esta transformación se desprende del principio de simetría.)

1234. Transforme el semiplano superior $\operatorname{Im} z > 0$ en el rombo del w-plano de ángulo $\pi\alpha$ en el vértice A y de lado d (fig. 38). La correspondencia de puntos se da mediante el esquema

$$w\,(A=0,\ B=d,\ C=d\,(1+e^{i\pi\alpha}),\qquad D=de^{i\pi\alpha})\to z\,(0,\ 1,\ \infty,\ -1).$$

Justifique la posibilidad de esta transformación.

1235. Transforme el semiplano superior $\operatorname{Im} z > 0$ en los recintos del w-plano indicados en la fig. 39. Los parámetros a y b ($a > 0$,

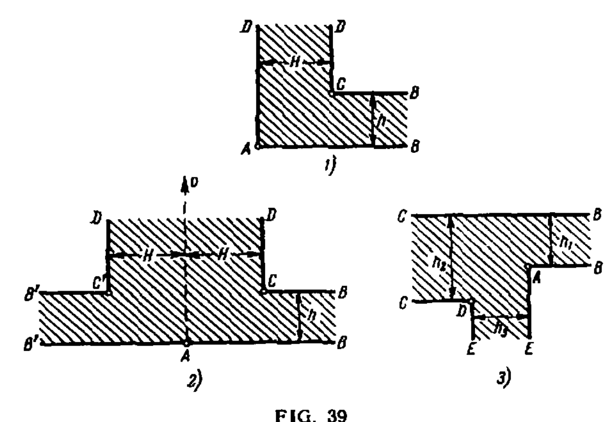


FIG. 39

$b > 0$) — las preimágenen de los vértices correspondientes — no se pueden escoger arbitrariamente y deben ser hallados.

1) $w\,(A=0,\ B=\infty,\ C=H+ih,\ D=\infty)\to z\,(0,\ 1,\ a,\ \infty)$.

2) $w\,(B=\infty,\ C=H+ih,\ D=\infty,\ C'=-H+ih,\ B'=\infty)\to$ $\to z\,(1,\ a,\ \infty,\ -a,\ -1)$.

Sugerencia. Haga un corte complementario a lo largo del eje imaginario y recurra al principio de simetría.

3) $w\,(A=0,\ B=\infty,\ C=\infty,\ D=-h_2-i\,(h_2-h_1),\ E=\infty)\to$ $\to z\,(0,\ 1,\ a,\ \infty,\ -b)$.

1236. Halle la función $w(z)$ que transforma el círculo $|z|<1$ en el interior de un polígono regular de n lados, que tiene su centro en el origen de coordenadas y uno de los vértices en el punto $w=1$, con la condición $w(0)=0$ y $w'(0)>0$.

2) Transforme el círculo $|z| < 1$ en el exterior del mismo polígono de n lados de manera que $w(0) = \infty$ y $w(x) > 0$ $(0 < x < 1)$. Determine c_{-1} en el desarrollo $w(z) = \frac{c_{-1}}{z} + \ldots$

1237. 1) Halle la función $w(z)$ que transforma el círculo $|z| < 1$ en el interior de una estrella regular de cinco puntas, que tiene su centro en el origen de coordenadas y uno de los vértices en el punto $w = 1$; las condiciones de normalización: $w(0) = 0$ y $w'(0) < 0$.

2) Transforme el círculo $|z| < 1$ en el exterior de la misma estrella; $w(0) = \infty$ y $w(x) > 0$ $(0 < x < 1)$; determine c_{-1} en el desarrollo $w(z) = \frac{c_{-1}}{z} + \ldots$

1238. Halle el recinto en el que la función

$$w(z) = \int_0^z \frac{(1+t^n)^\lambda \, dt}{(1-t^n)^{\frac{2}{n}+\lambda}}, \quad w'(0) > 0, \quad -1 < \lambda < 1 - \frac{2}{n},$$

transforma el círculo unidad $|z| < 1$.

1239. Transforme el semiplano superior $\operatorname{Im} z > 0$ en el polígono regular de n lados del w-plano, que tiene su centro en el origen de coordenadas y uno de los vértices en el punto $w = 1$; la normalización: $w(i) = 0$ y $w(0) = 1$.

1240. Sea el recinto P del w-plano el exterior de la "estrella" compuesta por n segmentos que salen del punto $w = 0$ (fig. 40).

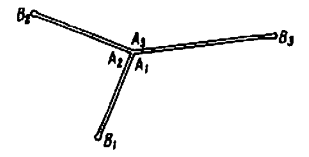


FIG. 40

Sean A_k los vértices de P en el origen de coordenadas, $\alpha_k\pi$ los ángulos correspondientes $\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 2\right)$, B_k los vértices de P en los extremos de los segmentos de la estrella (A_1, B_1, A_2, B_2, ... están dispuestos en el orden del recorrido positivo de P) y $l_k = \overline{A_k B_k}$ las longitudes de los segmentos de la estrella. Demuestre que la función $w = f(z)$, $f(0) = \infty$, que transforma el círculo unidad $|z| < 1$ en P,

es de la forma

$$f(z)=\frac{C}{z}\prod_{k=1}^{n}(z-a_k)^{\alpha_k},$$

donde C es una constante compleja y $a_k=e^{i\varphi_k}$ son los puntos de la circunferencia $|z|=1$ correspondientes a A_k. Los puntos $b_k=e^{i\psi_k}$, correspondientes a los vértices B_k, son raíces de la ecuación

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k}{z-a_k}-\frac{1}{z}=0. \tag{3}$$

¿Cómo determinar los parámetros C, a_k, b_k?

Sugerencia. Si se emplea la prolongación según el principio de simetría la función $f(z)$ se multiplica por factores constantes y por esto la función

$$\varphi(z)=\frac{f'(z)}{f(z)}$$

es uniforme en el z-plano.

Observación. La fórmula obtenida ofrece inmediatamente la solución de una serie de problemas del capítulo II, por ejemplo, de los problemas **320**, 2); **321**, 1); **323**, y **329**.

Se recomienda resolver de nuevo los problemas señalados y determinar las *constantes que figuran en la fórmula general.*

1241. Transforme el exterior de la quebrada de dos eslabones (fig. 41) en el exterior del círculo $|z|>1$ con la condición: $w(\infty)=\infty$ y $w'(\infty)>0$.

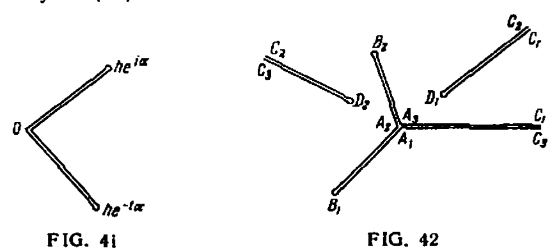


FIG. 41 FIG. 42

1242. Demuestre que la función $w=f(z)$, que transforma el semiplano superior $\operatorname{Im} z>0$ en el exterior de la estrella del problema **1240**, es de la forma

$$f(z)=C\frac{\prod_{k=1}^{n}(z-a_k)^{\alpha_k}}{(z-z_0)(z-\bar{z}_0)},$$

donde z_0 es el punto del semiplano superior que pasa al ∞.

1243. Sea P el recinto del w-plano limitado por el rayo $[0,\infty)$, por $n-1$ segmentos que van del punto $w=0$ a los puntos B_l $(l=1, 2, \ldots, n-1)$ y por $m-1$ rayos que van de los puntos D_s $(s=1,$

2, ..., $m-1$) al ∞ y que al ser prolongados en la dirección contraria pasan por el origen de coordenadas (fig. 42). Sean A_k ($k=1, 2, \ldots, n$) los vértices de P en el origen, $\alpha_k\pi$ los ángulos correspondientes, C_j ($j=1, 2, \ldots, m$) los vértices de P en el ∞, $\gamma_j\pi$ los ángulos correspondientes y $A_1B_1A_2 \ldots A_nC_1D_1 \ldots C_m$ el recorrido positivo de la frontera de P. Demuestre que la función $w=f(z)$, que transforma el semiplano superior $\operatorname{Im} z > 0$ en P, es de la forma

$$f(z) = C\frac{\prod_{k=1}^{n}(z-a_k)^{\alpha_k}}{\prod_{j=1}^{m}(z-c_j)^{\gamma_j}}, \tag{4}$$

donde a_k, c_j son los puntos del eje x correspondientes a los vértices A_k, C_j. Los puntos b_i, d_s del eje x correspondientes a los vértices B_i, D_s son raíces de la ecuación

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k}{z-a_k}-\sum_{j=1}^{m}\frac{\gamma_j}{z-c_j}=0. \tag{5}$$

¿Cómo determinar los parámetros C, a_k, b_i, c_j, d_s? ¿Qué cambiará si uno de los parámetros a_k, b_i, c_j, d_s resulta igual al ∞?

Sugerencia. Demuestre que

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k}{z-a_k}-\sum_{j=1}^{m}\frac{\gamma_j}{z-c_j}=\frac{\prod_{i=1}^{n-1}(z-b_i)\prod_{s=1}^{m-1}(z-d_s)}{\prod_{k=1}^{n}(z-a_k)\prod_{j=1}^{m}(z-c_j)}.$$

1244. Demuestre que la fórmula (4) del problema **1243** es válida también para recintos P cuya frontera contiene dos rayos $[0, \infty)$ (fig. 43). En este caso el vértice del origen de coordenadas se toma en consideración también en el caso en que de él salen solamente dos rayos que forman una recta.

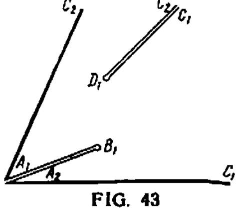


FIG. 43

En los problemas **1245—1249** transforme en el semiplano superior $\operatorname{Im} z > 0$ los recintos del w-plano indicados en las figuras correspondientes con las condiciones dadas y determine los parámetros a y b ($a > 0$, $b > 0$).

1245. El recinto indicado en la fig. 44,

$$w(A_1=0,\ B=he^{i\pi\alpha_2},\ A_2,\ C=\infty)\to z(-1,\ b,\ 1,\ \infty).$$

1246. El recinto indicado en la fig. 45,

$$w(A_1=0,\ B=ih,\ A_2,\ C=\infty,\ D=iH,\ C_2=\infty)\to$$
$$\to z\left(-a,\ 0,\ a,\ \frac{1}{a},\ \infty,\ -\frac{1}{a}\right).$$

1247. El recinto indicado en la fig. 46,

$$w(A_1=0,\ B_1=-he^{i\pi\alpha},\ A_2,\ B_2=he^{i\pi\alpha},\quad A_3,\ C=\infty)\to$$
$$\to z(-1,\ -b,\ 0,\ b,\ 1,\ \infty).$$

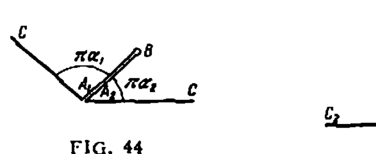


FIG. 44

FIG. 45

1248. El recinto indicado en la *fig.* 47,

$$w(A_1=0,\ B=he^{i\pi\alpha_1},\ A_2,\ C_1=\infty,\ D=He^{i\pi\alpha_1}\ ,C_2=\infty)\to$$
$$\to z\left(-a,\ 0,\ b,\ \frac{1}{b},\ \infty,\ -\frac{1}{a}\right).$$

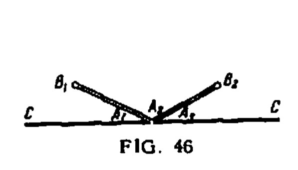


FIG. 46

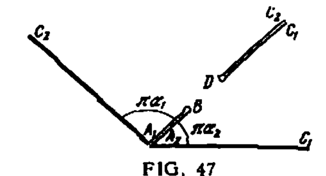


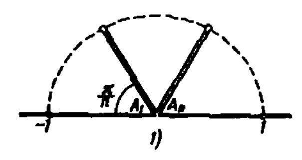
FIG. 47

1249. 1) El recinto indicado en la fig. 48, *1*,

$$w(\infty)=\infty,\ w(\pm 1)=\pm 1.$$

2) El recinto indicado en la fig. 48, *2* (los ángulos entre los cortes son de $\frac{\pi}{n}$; los segmentos extremos forman con los rayos correspondientes del eje real ángulos de $\frac{\pi}{2n}$),

$$w(\infty)=\infty,\ w(A_1,\ A_n)\to z(-1,\ 1).$$



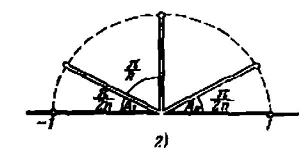


FIG. 48

1250. Sea el recinto P del w-plano una franja horizontal de anchura H con cortes que van al ∞ hacia la izquierda de los puntos B_i $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$ y hacia la derecha de los puntos D_s

$(s=1, 2, \ldots, m-1)$ (fig. 49). Demuestre que la función $w=f(z)$, que transforma el semiplano superior $\operatorname{Im} z > 0$ en el recinto P, es de la forma

$$f(z)=\sum_{k=1}^{n}\frac{h_k}{\pi}\ln(z-a_k)-\sum_{j=1}^{m}\frac{l_j}{\pi}\ln(z-c_j)+C, \tag{6}$$

donde a_k, c_j son los puntos del eje x correspondientes a los vértices A_k y C_j del recinto P; h_k son las distancias entre los cortes

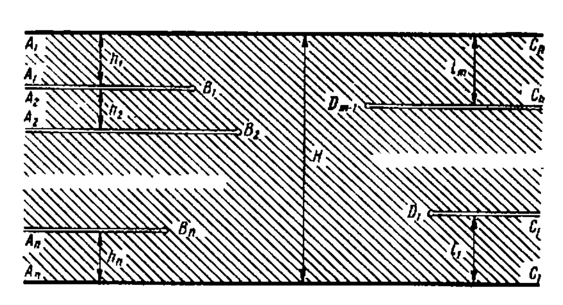


FIG. 49

que van hacia la izquierda y l_j de los que van hacia la derecha. Los puntos b_i $(i=1, 2, \ldots, n-1)$ y d_s $(s=1, 2, \ldots, m-1)$ del eje x correspondientes a los vértices B_i y D_s son raíces de la ecuación

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{h_k}{z-a_k}-\sum_{j=1}^{m}\frac{l_j}{z-c_j}=0. \tag{7}$$

¿Cómo determinar los parámetros C, a_k, b_i, c_j, d_s? ¿Qué cambiará si uno de los parámetros a_k, b_i, c_j, d_s es igual al ∞?

Sugerencia. El problema se reduce al problema 1244. Se puede también buscar la función $f'(z)$ que es uniforme o partir directamente de la fórmula de Christoffel — Schwarz.

1251. Sea el recinto P el semiplano superior $\operatorname{Im} w > 0$ con cortes horizontales que van hacia la izquierda al ∞ de los puntos B_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ y hacia la derecha al ∞ de los puntos D_s $(s=1, 2, \ldots, m)$ (fig. 50). Demuestre que la función $w=f(z)$, que transforma el semiplano superior $\operatorname{Im} z > 0$ en el recinto P, es de la forma

$$f(z)=\sum_{k=1}^{n}\frac{h_k}{\pi}\ln(z-a_k)-\sum_{j=1}^{m}\frac{l_j}{\pi}\ln(z-c_j)+Az+B, \tag{8}$$

donde a_k, c_j son los puntos del eje x correspondientes a los vértices A_k y C_j del recinto P y h_k, l_j son las distancias entre los cortes que van en una misma dirección. Además, el punto A_0 pasa al ∞, $A > 0$ e $\operatorname{Im} B = \sum_{j=1}^{m} l_j$. Los puntos $b_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ y

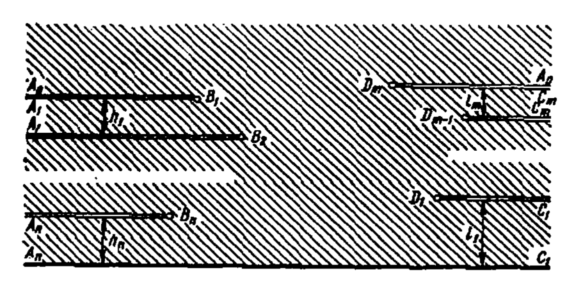


FIG. 50

$d_s (s = 1, 2, \ldots, m)$ del eje x correspondientes a los vértices B y D_s son raíces de la ecuación

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{h_k}{z - a_k} - \sum_{j=1}^{m} \frac{l_j}{z - c_j} + A\pi = 0. \tag{9}$$

¿Cómo determinar los parámetros A, B, a_k, b_i, c_j, d_s? Demuestre que si A_0 pasa al punto $a_0 \neq \infty$, entonces

$$f(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{h_k}{\pi} \ln (z - a_k) - \sum_{j=1}^{m} \frac{l_j}{\pi} \ln (z - c_j) + \\ + \frac{L - H}{\pi} \ln (z - a_0) + \frac{A}{z - a_0} + B, \tag{10}$$

donde

$$H = \sum_{k=1}^{n} h_k, \quad L = \sum_{j=1}^{m} l_j,$$
$$A < 0 \text{ e } \operatorname{Im} B = L.$$

Si el parámetro a_k o c_j es igual al ∞, en la fórmula (10) desaparece el sumando correspondiente.

Sugerencia. Haga uso de la fórmula de Christoffel — Schwarz. Para determinar los coeficientes de los términos logarítmicos compare el incremento de w correspondiente al recorrido (a lo largo de las semicircunferencias) de los puntos a_0, a_k, c_j, calculado geométricamente y mediante la fórmula para $f(z)$.

1252. Sea el recinto P el w-plano con cortes horizontales que van hacia la izquierda al ∞ de los puntos $B_i (i = 1, 2, \ldots, n)$

(fig. 51). Demuestre que la función $w=f(z)$, que transforma el semiplano superior $\operatorname{Im} z>0$ en el recinto P, es de la forma

$$f(z)=-Az^2+Bz+C+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{h_k}{\pi}\ln(z-a_k),$$

donde a_k son los puntos del eje x correspondientes a los vértices A_k del recinto P y h_k son las distancias entre los cortes. Además,

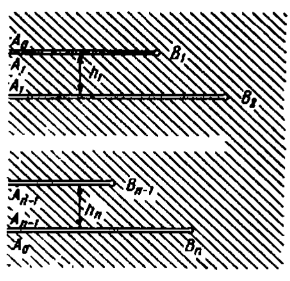


FIG. 51

el punto A_0 pasa al ∞, $A>0$ y B es un número real. Los puntos b_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ correspondientes a los vértices B_i son los ceros de la derivada $f'(z)$. ¿Cómo determinar los parámetros A, B, C, a_k, b_i?

Sugerencia. Véase la sugerencia al problema **1251**.

1253. Sea el recinto P el w-plano con cortes horizontales que van al ∞ hacia la izquierda y hacia la derecha (fig. 52). Demuestre que la función $w=f(z)$, que transforma el semiplano superior $\operatorname{Im} z>0$ en el recinto P es de la forma

$$f(z)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{h_k}{\pi}\ln(z-a_k)-\sum_{j=0}^{m-1}\frac{l_j}{\pi}\ln(z-c_j)+ \\ +\frac{A}{z-a_0}+\frac{C}{z-c_0}+B, \qquad (11)$$

donde $A>0$, $C>0$, $h_0=\operatorname{Im}(D_m-B_1)$, $l_0=\operatorname{Re}(D_1-B_n)$, mientras que los demás parámetros (incluyendo b_i y d_s para los vértices B_i y D_s) toman los mismos valores que en el problema **1251**. ¿Cómo determinar los parámetros A, B, C, a_k, b_i, c_j, d_s? Pruebe que, siendo $a_0=\infty$, se tiene

$$f(z)=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{h_k}{\pi}\ln(z-a_k)-\sum_{j=0}^{m-1}\frac{l_j}{\pi}\ln(z-c_j)-\frac{C}{z-c_0}+Az+B, \quad (12)$$

donde $A > 0$ y $C > 0$. Si el parámetro a_k $(k \neq 0)$ o el parámetro c_j $(j \neq 0)$ es igual al ∞, el sumando correspondiente de la fórmula (12) desaparece.

Sugerencia. Véase la sugerencia al problema 1251.

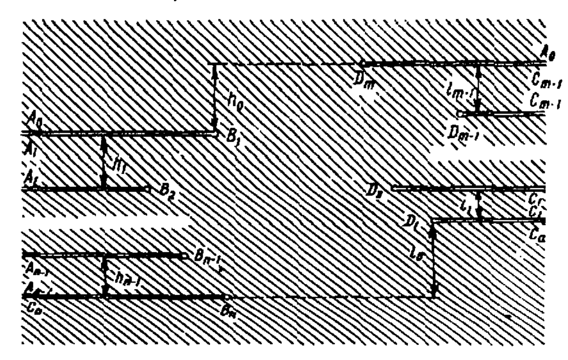


FIG. 52

1254. Transforme el semiplano superior $\mathrm{Im}\, z > 0$ en los recintos del w-plano indicados en la fig. 53 (todas las dimensiones se seña-

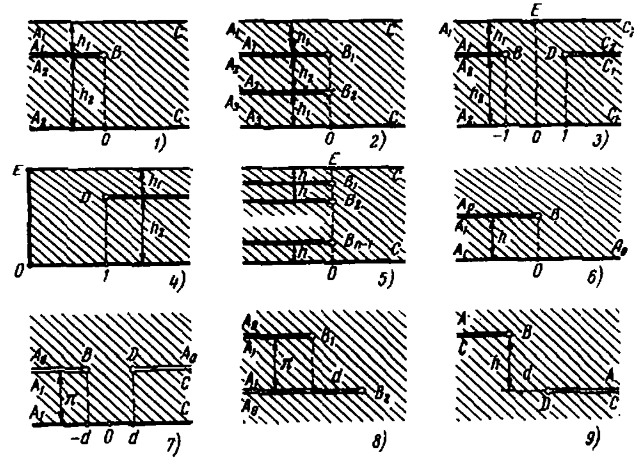


FIG. 53

lan en las figuras correspondientes) con las condiciones dadas; halle a y b ($a > 0$, $b > 0$).

1) $(A_1, B, A_2, C) \to (-1, b, 1\ \infty)$;
2) $(A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, C) \to (-1, -b, 0, b, 1, \infty)$;
3) $(E, O, D) \to (-1, 1, \infty)$; 4) $E, O, D) \to (-1, 1, \infty)$;
5) $(E, O, C) \to (-1, 1, \infty)$; 6) $(A_0, B, A_1) \to (\infty, 0, 1)$;
7) $(A_1, O, C) \to (-1, 0, 1)$;
8) $(A_0, B_1, A_1, B_2) \to (\infty, -(1+a), -1, 0)$; $d = \operatorname{Re}(B_2 - B_1)$;
9) $(A, B, C, D) \to (\infty, -1, a, 1)$; $d = \operatorname{Re}(D - B)$; $h = \operatorname{Im}(B - D)$.

§ 2. TRANSFORMACIONES CONFORMES RELACIONADAS CON FUNCIONES ELÍPTICAS.[1])

La integral

$$u(z, k) = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \tag{1}$$

donde el integrando es igual a 1 para $t=0$, se llama integral *elíptica normal de primera especie en la forma de Legendre.* El parámetro k se denomina *módulo*; en lo sucesivo se supone que $0 < k < 1$.

El cambio de la variable independiente $z = \operatorname{sen}\varphi$ y la sustitución $t = \operatorname{sen}\psi$ llevan esta integral a la forma

$$u(\operatorname{sen}\varphi, k) = F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\psi}}. \tag{2}$$

La función inversa

$$z = \operatorname{sn}(u, k) \tag{3}$$

(o en otras denotaciones $\varphi = \operatorname{am} u$) es una de las fundamentales *funciones elípticas de Jacobi* y se denomina *sn-función de Jacobi*. De su definición se desprende que $\operatorname{sn}(0, k) = 0$. Con la función $\operatorname{sn}(u, k)$ están relacionadas dos funciones más

$$\begin{aligned} \operatorname{cn}(u, k) &= \sqrt{1-\operatorname{sn}^2(u, k)}, \\ \operatorname{dn}(u, k) &= \sqrt{1-k^2\operatorname{sn}^2(u, k)}, \end{aligned} \tag{4}$$

que se denominan *cn — y dn — funciones de Jacobi* respectivamente. Las ramas de las raíces se determinan mediante las condiciones $\operatorname{cn}(0, k) = \operatorname{dn}(0, k) = 1$. Si

---

[1]) Las propiedades y las transformaciones de las funciones y de las integrales elípticas que se emplean en los problemas de este parágrafo se pueden encontrar, por ejemplo, en los libros: Н. И. Ахиезер, Элементы теории эллиптических функций, «Наука» 1970 (*N. I. Ajiezer*, Elementos de la teoría de las funciones elípticas) *E. T. Whittaker* and *G. N. Watson*, A course of modern analysis, volume 2, Cambridge at the University press, 1927 y *H. Bateman* and *A. Erdélyi*, Higher transcendental functiones, volume 3, New York — Toronto — London, McGraw-Hill book company, Inc., 1955.

Un breve resumen de las transformaciones correspondientes se da en los libros: *G. Korn* and *T. Korn*. Mathematical Handbook for Scientist and Engineers, McGraw-Hill, New York, 1961 y *Janke — Emde — Lösch*, Tafeln Höherer Funktionen, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1960.

no hay necesidad de indicar el módulo k, se escribe simplemente $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$ y $\operatorname{dn} u$.

De (1), (2), (3) y (4) se deduce que

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d \operatorname{sn} u}{du} = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u, \quad \frac{d \operatorname{cn} u}{du} = -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u, \\ &\frac{d \operatorname{dn} u}{du} = -k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

El valor de la función $u(z, k)$ para $z = 1$ $\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right)$, es decir, la integral

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \mathbf{K}(k)$$

se llama *integral elíptica completa de primera especie*. La magnitud $k' = \sqrt{1-k^2}$ se denomina *módulo complementario*.

$\mathbf{K}(k) = \mathbf{K}$ y $\mathbf{K}(k') = \mathbf{K}'$ se denominan *integrales elípticas relacionadas*.

En los problemas se emplean con frecuencia las siguientes relaciones (transformaciones de integrales elípticas completas de primera especie) que son fácil de comprobar:

$$\mathbf{K}\left(\frac{1}{k}\right) = k(\mathbf{K} + i\mathbf{K}'),$$

$$\mathbf{K}\left(\frac{1}{k'}\right) = k'(\mathbf{K}' + i\mathbf{K}), \quad \mathbf{K}\left(\frac{ik}{k'}\right) = k'\mathbf{K},$$

$$\mathbf{K}\left(\frac{ik'}{k}\right) = k\mathbf{K}'. \quad (6)$$

Observemos también que

$$\int_1^{1/k} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}} = \mathbf{K}'$$

(sustitución $k^2t^2 + k'^2\tau^2 = 1$),

$$\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(1+k'^2t^2)}} = \mathbf{K}' \text{ (sustitución } t = \operatorname{tg} \psi).$$

1255. Demuestre que la imagen del semiplano superior $\operatorname{Im} z > 0$ en la transformación mediante la integral elíptica normal de primera especie

$$u = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

es un rectángulo de vértices $\pm\mathbf{K}$ y $\pm\mathbf{K} + i\mathbf{K}'$ correspondientes a los puntos ± 1 y $\pm\frac{1}{k}$.

Prolongando esta transformación según el principio de simetría, demuestre que la función inversa $z = \operatorname{sn} u$ es doblemente periódica de períodos $4\mathbf{K}$ y $2i\mathbf{K}'$.

Considere la correspondencia entre los planos u y φ, donde $u = F(\varphi, k)$.

Sugerencia. Aplique el principio de correspondencia de fronteras. Dedique especial atención a la variación del argumento de $\frac{du}{dz}$ cuando z recorre el eje real.

1256. Transforme el semiplano superior $\operatorname{Im} z > 0$ en el rectángulo del w—plano de vértices $\pm a$ y $\pm a + ib$ $(a > 0,\ b > 0)$.

1257. Halle la imagen del cuarto cuadrante del z—plano en la transformación mediante la integral elíptica

$$u = \int_z^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(k'^2+k^2t^2)}}.$$

Prolongando esta transformación según el principio de simetría, halle la imagen de todo el z—plano con cortes a lo largo de los rayos $(-\infty, -1]$, $[1, \infty)$, $\left(-i\infty, -\frac{ik'}{k}\right]$ y $\left[\frac{ik'}{k}, i, \infty\right)$. Compruebe que la función inversa será $z = \operatorname{cn}(n, k)$ y demuestre que es doblemente periódica de períodos $4K$ y $2K + 2iK'$.

1258. Halle la imagen del cuarto cuadrante del z—plano en la transformación mediante la integral elíptica

$$u = \int_z^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(t^2-k'^2)}}.$$

Prolongando esta transformación según el principio de simetría, halle la imagen de todo el z—plano con cortes a lo largo de los rayos $(-\infty, -k']$, y $[k', \infty)$. Compruebe que la función inversa es $z = \operatorname{dn}(u, k)$ y demuestre que es doblemente periódica de períodos $2K$ y $4iK'$.

1259. Halle la imagen del primer cuadrante del z—plano en la transformación mediante la integral elíptica de primera especie

$$u(z, k_1) = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k_1^2t^2)}},$$

donde k_1 toma los valores k, $\frac{1}{k}$, k', $\frac{1}{k'}$, $\frac{ik}{k'}$ e $\frac{ik'}{k}$.

Sugerencia. Haga uso de las fórmulas (6).

La integral

$$v(z, k) = \int_0^z \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}\,dt = \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\psi}\,d\psi = E(\varphi, k) \qquad (7)$$

($z = \text{sen}\,\varphi$) se denomina *integral elíptica normal de segunda especie en la forma de Legendre.*

Tomando $z = 1$ ($\varphi = \pi/2$) se obtiene *la integral elíptica completa de segunda especie*

$$\mathbf{E}\,(k) = \mathbf{E} = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}\,dt. \tag{8}$$

Introduciendo la notación $\mathbf{E}\,(k') = \mathbf{E}'$, es fácil obtener las relaciones

$$\begin{gathered} \mathbf{E}\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k}\,[(\mathbf{E} - k'^2\mathbf{K}) - i\,(\mathbf{E}' - k^2\mathbf{K}')], \\ \mathbf{E}\left(\frac{1}{k'}\right) = \frac{1}{k'}\,[(\mathbf{E}' - k^2K') - i\,(\mathbf{E} - k'^2\mathbf{K})], \\ \mathbf{E}\left(\frac{ik}{k'}\right) = \frac{1}{k'}\,\mathbf{E}, \quad \mathbf{E}\left(\frac{ik'}{k}\right) = \frac{1}{k}\,\mathbf{E}'. \end{gathered} \tag{9}$$

Las integrales elípticas completas de primera y segunda especies, correspondientes a los módulos complamentarios k y k', están ligadas mediante *la relación de Legendre*

$$\mathbf{E}\mathbf{K}' + \mathbf{E}'\mathbf{K} - \mathbf{K}\mathbf{K}' = \frac{\pi}{2}. \tag{10}$$

La sustitución de la variable independiente $z = \text{sn}\,u$ en la integral que define $v\,(z,\ k)$ conlleva a *la función de Jacobi*

$$E\,(u,\ k) \equiv E\,(u) = v\,(\text{sn}\,u,\ k) = \int_0^u \text{dn}^2\tau\,d\tau, \tag{11}$$

que expresa la integral elíptica de segunda especie en función de la integral elíptica de primera especie. Con la función $E\,(u)$ está relacionada la función $Z\,(u)$ que se define mediante la fórmula

$$Z\,(u) = E\,(u) - \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{K}}\,u. \tag{12}$$

1260. Halle la imagen del primer cuadrante del z-plano en la transformación mediante la integral elíptica normal de segunda especie

$$v\,(z,\ k_1) = \int_0^z \sqrt{\frac{1-k_1^2t^2}{1-t^2}}\,dt,$$

donde k_1 toma los valores k, $\frac{1}{k}$, k', $\frac{1}{k'}$, $\frac{ik}{k'}$ e $\frac{ik'}{k}$.

Sugerencia. Haga uso de las fórmulas (9) y de que

$$\int_1^{1/k} \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}\,dt = i\,(\mathbf{K}' - \mathbf{E}')$$

(esta fórmula se obtiene empleando la sustitución $k^2t^2 + k'^2\tau^2 = 1$).

1261*. Transforme el semiplano superior $\text{Im}\,z > 0$ en el semiplano superior $\text{Im}\,w < 0$ con dos cortes verticales a lo largo de los

segmentos $\mathrm{Re}\,w = \pm a$, $0 \leqslant \mathrm{Im}\,w \leqslant h$ con la condición de normalización $w(0)=0$, $w(\infty)=0$ y $w'(\infty) > 0$.

Sugerencia. Haga uso de la fórmula de Christoffel-Schwarz representándola en la forma

$$w(z) = C\int_0^z \frac{b^2 - z^2}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}\,dz = C_1\,[(k^2b^2-1)\,u(z, k) + v(z, k)],$$

donde $C_1 = \frac{C}{k^2}$, $w(\pm 1) = \pm a$, $w(\pm b) = \pm a + ih$, y obtenga la ecuación para la determinación de los parámetros C_1, k y b.

1262. Demuestre que la función

$$w = Z(u) + \frac{\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{sn}\,u}$$

trasforma el rectángulo $0 < \xi < \mathbf{K}$, $0 < \eta < \mathbf{K}'$ del plano $u = \xi + i\eta$ en el cuarto cuadrante del plano w con un corte a lo largo de $\left[-\frac{\pi i}{2\mathbf{K}},\ h - \frac{\pi i}{2\mathbf{K}}\right]$, donde $h - \frac{\pi i}{2\mathbf{K}}$ es la imagen de aquel punto $u = \xi + i\mathbf{K}'$ para el cual $\frac{dw}{du} = 0$. Prolongando esta transformación según el principio de simetría, demuestre que la imagen del rectángulo $|\xi| < \mathbf{K}$, $|\eta| < \mathbf{K}'$ es todo el plano con cortes representados en la fig. 54.

FIG. 54

Observación. Acerca de la transformación del rectángulo en el exterior de una cruz o en el exterior de un rectángulo con cuatro apéndices, que representan la continuación de sus lados, véase *Darwin*, Some conformal transformations involving elliptic functions, The Philosophica Magazine ser. 7 **41**, N° 312 (1950).

La integral

$$w(z, \nu, k) = \int_0^z \frac{dt}{(1+\nu t^2)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} =$$

$$= \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1+\nu\,\mathrm{sen}^2\varphi)\sqrt{1-k^2\,\mathrm{sen}^2\varphi}} = \Pi(\varphi, \nu, k) \qquad (13)$$

se llama *integral elíptica normal de tercera especie en la forma de Legendre.*

La sustitución de la variable independiente $z = \mathrm{sn}\,u$ conduce a la fórmula

$$w(\mathrm{sn}\,u, \nu, k) = \int_0^u \frac{d\tau}{1+\nu\,\mathrm{sn}^2\tau}. \qquad (14)$$

La magnitud $\Pi_1(\nu, k) = w(1, \nu, k) = \Pi\left(\frac{\pi}{2}, \nu, k\right)$ se denomina *integral elíptica completa de tercera especie.*

1263. Halle la imagen del primer cuadrante del z-plano en la transformación mediante la integral elíptica normal de tercera especie (13) para $0 < k < 1$. Considere por separado los casos en que ν pertenece a los intervalos:
1) $(-\infty, -1)$; 2) $(-1, -k^2)$; 3) $(-k^2, 0)$; 4) $(0, \infty)$.
Considere también los casos en que $\nu = -1$ y $\nu = -k^2$.
Indique los recintos del w-plano que se obtienen mediante la prolongación según el principio de simetría a través de diferentes intervalos del eje real del plano z. En cada caso indique los recintos correspondientes en el u-plano, donde $z = \operatorname{sn} u$.

La integral

$$w = \int_z^\infty \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}} = \int_z^\infty \frac{dz}{\sqrt{4(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}} \tag{15}$$

de discriminante $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$ (en tal caso e_1, e_2, e_3 son distintos dos a dos) se llama *integral elíptica normal de primera especie en la forma de Weierstrass* y la función

$$z = \wp w \tag{16}$$

se denomina *p-función de Weierstrass.* Es una de las funciones elípticas fundamentales de períodos 2ω y $2\omega'$ $\left(\operatorname{Im}\frac{\omega'}{\omega} \neq 0\right)$. Verifica la ecuación diferencial

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3 = 4(\wp - e_1)(\wp - e_2)(\wp - e_3). \tag{17}$$

La función $\wp(w)$ es par, bivalente en el paralelogramo de períodos (fig. 55) y tiene en él un polo de segundo orden en el cero y puntos dobles ($\wp' = 0$) ω, $\omega + \omega'$, ω':

$$\left.\begin{aligned} e_1 = \wp(\omega),\ e_2 = \wp(\omega + \omega') \\ e_3 = \wp(\omega'). \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

De (17) se desprende que

$$\left.\begin{aligned} e_1 + e_2 + e_3 &= 0, \\ e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1 &= -\frac{1}{4}g_2, \\ e_1e_2e_3 &= \frac{1}{4}g_3. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

1264*. Analice la transformación del z-plano que realiza la integral elíptica normal de primera especie en la forma de Weierstrass (15) para valores reales de g_2 y g_3 y para $\Delta > 0$. Considere los casos $g_3 > 0$, $g_3 < 0$ y $g_3 = 0$. Halle los períodos de $\wp(w)$.

Sugerencia. Considere la transformación del semiplano superior $\operatorname{Im} z > 0$ empleando el principio de correspondencia de fronteras.

1265*. Analice la transformación del z-plano mediante la integral elíptica normal de primera especie (15) para valores reales de g_2 y g_3

y para $\Delta < 0$. Considere, en particular, el caso $g_3 = 0$. Halle los períodos de $\wp(w)$.

Sugerencia. Como $\Delta < 0$, dos de las magnitudes e_1, e_2, e_3 son conjugadas complejas y una es real. Sea e_2 una magnitud real y sea $e_1 = \alpha + i\beta$, $e_3 = \alpha - i\beta$ $(\beta > 0)$. Considere la transformación del semicírculo $|z - e_2| = |e_1 - e_2|$, $\operatorname{Im} z > 0$ empleando el principio de correspondencia de fronteras y prolongue esta transformación según el principio de simetría.

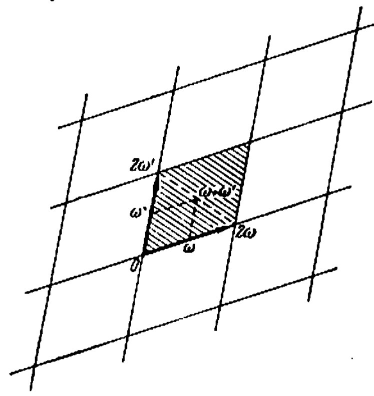


FIG. 55

1266. Halle las transformaciones en el semiplano superior $\operatorname{Im} w > 0$ de los triángulos ABC bajo las condiciones indicadas:

1) $(A = 0,\ B = \omega > 0,\ C = \omega(1 + i)) \to (\infty,\ -1,\ 0)$;

2) $\left(A = 0,\ B = a > 0,\ C = \frac{a\sqrt{3}}{2} e^{i\frac{\pi}{3}}\right) \to (\infty,\ -1,\ 1)$;

3) $\left(A = 0,\ B = a > 0,\ C = \frac{a\sqrt{3}}{2} e^{i\frac{\pi}{6}}\right) \to (\infty,\ -1,\ 0)$

Sugerencia. Haga uso de las soluciones de los problemas **1264** (en el caso $g_3 = 0$) y **1265** (en el caso $g_2 = 0$).

1267. Transforme los recintos biconexos *1—15*, situados en el z-plano e indicados en la fig. 56, en un anillo circular $\rho_1 < |w| < \rho_2$ y determine el módulo $\mu = \frac{\rho_2}{\rho_1}$ (véase la pág. 37—38).

En los problemas 1268—1270 transforme los recintos indicados en el círculo unidad $|t| < 1$.

1268. El rectángulo $|\operatorname{Re} u| < K$, $|\operatorname{Im} u| < K'$ $(0 < k < 1)$. Halle la posición de los vértices en la transformación.

1269. El interior de la elipse $|z - 1| + |z + 1| = 2a$ $(a > 1)$ con cortes $[-a,\ -1]$ y $[1,\ a]$.

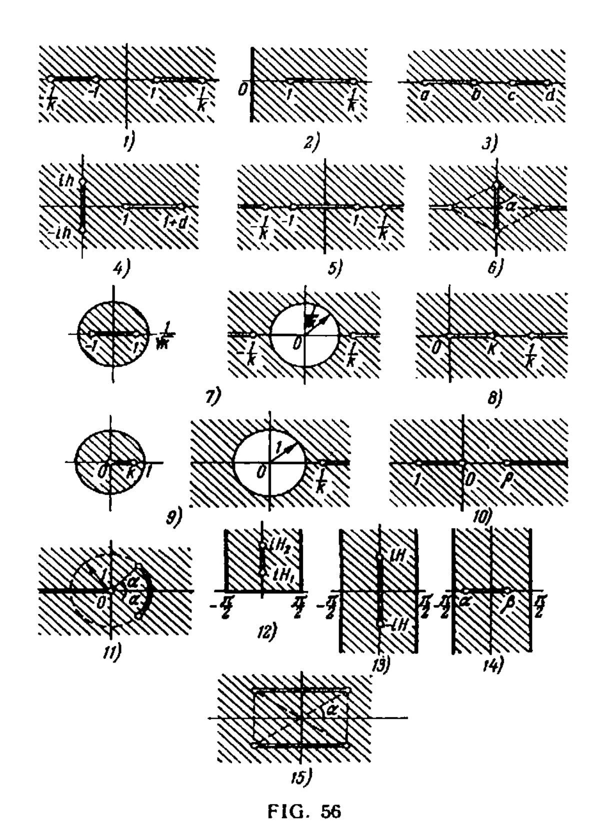


FIG. 56

ib -ib -a a
ih -ih

1) 2) 3)

FIG. 57

1270. El interior de la elipse $|z-1|+|z+1|=2a$ $(a>1)$. Halle la posición de los focos en la transformación.

1271. Transforme el exterior del círculo unidad $|t|>1$ en los recintos *1*, *2* y *3* del z-plano indicados en la fig. 57.

Acerca de la aplicación de las funciones elípticas a los problemas de la transformación del semiplano superior en el exterior de arcos de elipses, hipérbolas y parábolas, así como a la transformación en un anillo circular del exterior de dos segmentos rectilíneos arbitrariamente situados o de dos arcos concéntricos, véase, por ejemplo, el libro de Л. И. Седов, Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, „Наука", 1966 (Sedov L. I., Problemas planos de hidrodinámica y aerodinámica).

CAPITULO X

APLICACIONES A LA MECANICA Y A LA FISICA

§ 1. APLICACIONES A LA HIDROMECANICA

El movimiento plano estacionario sin torbellinos de un fluido incompresible se caracteriza por la función analítica

$$w(z)=\varphi(x,\ y)+i\psi(x,\ y) \tag{1}$$

que se llama *potencial complejo* o *función característica* de la corriente; φ se llama *función potencial* y ψ, *función de corriente*. Las curvas $\varphi=\mathrm{const}$ se denominan *líneas equipotenciales* y las curvas $\psi=\mathrm{const}$, *líneas de corriente*. La velocidad de la corriente V está ligada a $w(z)$ por las relaciones

$$\left.\begin{aligned} &V=Ve^{i\alpha}=V_x+iV_y=\overline{w'(z)},\\ &V=|w'(z)|,\ \alpha=-\arg w'(z),\\ &V=\operatorname{grad}\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Sea C un contorno cerrado que se recorre en la dirección positiva (el contorno C puede estar formado por dos lados de un mismo arco recorridos en direcciones contrarias). La magnitud

$$\Gamma=\int_C V_s\,ds=\int_C V_x\,dx+V_y\,dy=\int_C d\varphi \tag{3}$$

se denomina *circulación* del vector V a lo largo del contorno C.

La magnitud

$$Q=\int_C V_n\,ds=\int_C(-V_y\,dx+V_x\,dy)=\int_C d\psi \tag{4}$$

(n es la normal exterior del contorno cerrado C recorrido en la dirección positiva) se denomina *flujo* del vector V a través del contorno C. Análogamente, el flujo del vector V a través del arco AB se define mediante la integral $\int_{AB} V_n\,ds$ (la dirección de la normal n debe ser indicada).

[1]) En relación con este capítulo véase [2, capítulo III] y la bibliografía allí indicada.

Uniendo las fórmulas (3) y (4), obtenemos

$$\Gamma + iQ = \int_C w'(z)\,dz. \tag{5}$$

Si $w'(z)$ está definida en el interior de C y tiene allí un número finito de puntos singulares, se tiene

$$\Gamma + iQ = 2\pi i \sum \operatorname{res} w'(z).$$

Si a es un polo de la función $w'(z)$, para $w(z)$ existe en una vecindad de a el desarrollo de tipo

$$w(z) = \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \ldots + \frac{p}{2\pi}\frac{1}{z-a} + \frac{\Gamma + iQ}{2\pi i}\ln(z-a) + c_0 + c_1(z-a) + \ldots$$

Si dice que el término $\frac{\Gamma + iQ}{2\pi i}\ln(z-a)$ (Γ y Q son números reales) determina en el punto a *un manantial — torbellino* de potencia Q y de intensidad Γ que se designa $(a;\ Q,\ \Gamma)$[1]; que el término $\frac{p}{2\pi}\frac{1}{z-a}$ determina *un doblete* de momento p, designado $(a;\ p)$ (p es un número complejo; el radio vector $\overline{p}$ determina la dirección del eje del doblete que pasa por el punto a en la dirección de la línea de corriente) y que los restantes términos $\frac{c_{-k}}{(z-a)^k}$ determinan en el punto a *multipletes* de orden $2k$.

Respectivamente, si en el ∞ se tiene

$$w(z) = c_n z^n + \ldots + \frac{p}{2\pi} z + \frac{\Gamma + iQ}{2\pi i}\ln z + c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \ldots,$$

el término $\frac{\Gamma + iQ}{2\pi i}\ln z$ determina en el ∞ *un manantial-torbellino* de potencia $-Q$ e intensidad $-\Gamma$, el término $\frac{p}{2\pi} z$ derermina *un doblete* de monento p (la dirección de las líneas de corriente en el ∞ coincide con la dirección del radio vector $\overline{p}$) y los restantes términos $c_k z^k$ determinan *multipletes* de orden $2k$.

Los puntos en los que $V=0$ y, por consiguiente, $w'(z)=0$, se llaman *puntos críticos* de la corriente; de estos puntos las líneas de corriente y equipotenciales salen alternadamente. Si el punto crítico es un cero de orden $(n-1)$ de la derivada, estas líneas forman entre sí ángulos de $\pi/2n$. Una ramificación semejante de las líneas es posible también en el ∞.

En los problemas 1272—1285 se requiere construir, a partir del potencial complejo de la corriente dado, las líneas equipotenciales y las líneas de corriente, determinar V, los puntos singulares y críticos, la potencia y la intensidad de los manantiales—torbellinos y los momentos de los dobletes, así como estudiar el comportamiento de la corriente en el ∞.

1272. $w = cz\ (c = \alpha + i\beta)$.

1273. $w = z^n$ (en particular, $n = 2,\ 3$).

---

[1] Si $Q=0$, se tiene *un torbellino* $(a;\ \Gamma)$. Si $\Gamma=0$, si tiene *un manantial* $(a;\ Q)$. Si la potencia del manantial es $Q<0$, suele decirse generalmente que se tiene *un sumidero*.

1274. $w=\frac{\Gamma+iQ}{2\pi i}\ln z$. Considere, en particular, los casos $\Gamma=0$ y $Q=0$.

1275. $w=\frac{\Gamma+iQ}{2\pi i}\ln\frac{z-a}{z-b}$.

1276. $w=\frac{1}{z}$. Determine también la velocidad en los puntos $2\pm i$.

1277. 1) $w=z+\frac{R^2}{z}$; 2) $w=z-\frac{R^2}{z}$; 1278. $w=\frac{1}{z^2}$.

1279. $w=\ln(z^2-a^2)$ $(a>0)$. Determine también la velocidad en los puntos $\pm ia$.

1280. $w=\ln\frac{z^2-a^2}{z^2+a^2}$ $(a>0)$.

1281. $w=\frac{Q}{2\pi}\ln\left(z-\frac{1}{z}\right)$. 1282. $w=\ln\left(1+\frac{1}{z^2}\right)$.

1283. $w=\ln\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)$.

1284. $w=az+\frac{Q}{2\pi}\ln z$ $(a>0,\ Q>0)$.

1285. $w=az+\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln z$ $(a>0,\ \Gamma>0)$.

1286. Investigue el carácter de la corriente en el recinto $|z|\geqslant R$, si

$$w=a\left(z+\frac{R^2}{z}\right)+\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln z\,(a>0,\ \Gamma>0).$$

Considere los casos: $\Gamma<4\pi aR$, $\Gamma=4\pi aR$ y $\Gamma>4\pi aR$.

1287. Halle en todo el plano el potencial complejo $w(z)$ de la corriente, formada por los manantiales—torbellinos $\{(a_k;\ Q_k,\ \Gamma_k)\}$ $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, que tiene en el infinito la velocidad dada $V_\infty=Ve^{i\alpha}$.

1288. ¿Puede partir una línea de corriente de un punto que es: 1) un torbellino, 2) un doblete, 3) un torbellino y un doblete a la vez.

1289. Halle la ley de variación de un manantial—torbellino, de un doblete y de un multiplete, situados en el punto a o en el ∞, para las siguientes transformaciones conformes univalentes de unas vecindades de estos puntos $(c_1\neq0,\ c_{-1}\neq0)$:

1) $\zeta=\alpha+c_1(z-a)+\ldots$; 2) $\zeta=\alpha+\frac{c_{-1}}{z}+\ldots$;

3) $\zeta=\frac{c_{-1}}{z-a}+c_0+\ldots$; 4) $\zeta=c_1z+c_0+\ldots$

1290. Halle la ley de variación de un manantial — torbellino para las transformaciones n — valentes:

$$\zeta = \alpha + c_n (z - a)^n + \ldots, \quad c_n \neq 0;$$
$$\zeta = \alpha + \frac{c_{-n}}{z^n} + \ldots, \quad c_{-n} \neq 0.$$

1291. Demuestre que la corriente puede ser prolongada según el principio de simetría a través de una parte rectilínea o circular de una línea de corriente o de una línea equipotencial, con la particularidad de que un manantial — torbellino se transforma en un manantial — torbellino, un doblete en un doblete y un multiplete, en general, en un conjunto de multipletes hasta el mismo orden inclusive. Halle la ley de variación de la potencia y de la intensidad de un manantial — torbellino y del momento de un doblete.

Observación. En el problema **1291** se establece *el principio de simetría* que, junto a las transformaciones conformes, se emplea ampliamente en la construcción de corrientes (véase los problemas **1293**—**1301**).

Del principio de simetría se deduce que, siempre que exista una parte rectilínea o circular en una línea de corriente o en una línea equipotencial, la corriente debe ser simétrica respecto a esta línea. Esto impone ciertas limitaciones no sólo a las singularidades de la corriente fuera de estas líneas, sino también en estas líneas o en sus extremos (si es que existen).

1292. Una corriente en el z — plano está formada por un número finito de manantiales, torbellinos y dobletes.

1) Halle la condición necesaria y suficiente para que la circunferencia $|z| = R$ sea una línea de corriente, si los manantiales, los torbellinos y los dobletes: a) no se hallan sobre esta circunferencia; b) se encuentran todos en ella; c) algunos se hallan sobre ella y otros no.

2) En estas mismas suposiciones halle las condiciones para que la circunferencia $|z| = R$ sea una línea equipotencial.

1293. Halle los potenciales complejos de las corrientes en el semiplano superior $\operatorname{Im} z > 0$ a partir de las singularidades dadas y del valor de la velocidad V_∞:

1) La velocidad $V_\infty = V$. 2) El torbellino $(a; \Gamma)$ y la velocidad $V_\infty = 0$. 3) El manantial $(a; Q)$ y la velocidad $V_\infty = 0$. 4) El doblete $(a; p)$ y la velocidad $V_\infty = 0$. 5) Los manantiales — torbellinos $\{(a_k; Q_k, \Gamma_k)\}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, el doblete $(a; p)$ y la velocidad $V_\infty = V$. ¿Qué se puede decir acerca del comportamiento de la corriente en el ∞? 6) El manantial — torbellino $(0; Q; \Gamma)$ y el doblete $(0; p)$; $V_\infty = 0$. ¿Qué valores puede tomar el momento del doblete p? ¿Es siempre posible la corriente, si $\Gamma \neq 0$?

1294. Construya en el círculo $|z| < R$ las corrientes que tienen respectivamente:

1) el torbellino $(a; \Gamma)$; 2) el doblete $(a; p)$.

1295. Halle las condiciones para la posibilidad de la construcción de corrientes en el círculo $|z| < R$, si:

1) sólo hay manantiales $\{(a_k; Q_k)\}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, situados en el interior del círculo;

2) además de los manantiales del punto 1) hay manantiales $\{(a'_k; Q'_k)\}$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$, situados en la circunferencia $|z| = R$.

Halle en ambos casos los potenciales complejos de las corrientes.

1296. Construya en el recinto $|z| > R$ las corrientes que se caracterizan, respectivamente, por:

1) el torbellino $(a; \Gamma)$, la velocidad $V_\infty = 0$ y la circulación en el infinito $\Gamma_\infty = 0$;

2) el doblete $(a; p)$, la velocidad $V_\infty = 0$ y la circulación $\Gamma_\infty = 0$;

3) la velocidad $V_\infty = Ve^{i\alpha}$ y la circulación $\Gamma_\infty = 0$;

4) la velocidad $V_\infty = Ve^{i\alpha}$ y la circulación Γ a lo largo de la circunferencia $|z| = R$.

Observación. Los dos ejemplos últimos del problema **1296** ofrecen la circundación de un círculo con una velocidad dada en el infinito con circulación y sin circulación (véase, por ejemplo, [2, capítulo III, nº 49]).

En los problemas **1297—1300** construya, aplicando el principio de simetría, las corrientes a partir de las singularidades dadas (en el infinito y en los puntos angulares la velocidad es igual a cero).

1297. *En el recinto* $|z| > 1$, $\operatorname{Im} z > 0$ *y con el torbellino* $(ia; \Gamma)$, $a > 0$.

1298. En el ángulo $0 < \arg z < \frac{\pi}{3}$ con el manantial $\left(ae^{i\frac{\pi}{6}}; Q\right)$, $a > 0$.

1299. En el primer cuadrante $\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Im} z > 0$ con el manantial $(1; Q)$.

1300. 1) En el primer cuadrante $\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Im} z > 0$ con el manantial $(1; Q)$ y con el sumidero $(i; -Q)$.

2) En el primer cuadrante $\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Im} z > 0$ con el manantial $(1+i; Q)$ y con el sumidero $(0; -Q)$.

1301. Construya la corriente en todo el z-plano, si se sabe que en el semiplano superior $\operatorname{Im} z > 0$ tiene un doblete $(a; p)$ y manantiales-torbellinos $\{(a_k; Q_k, \Gamma_k)\}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, que el eje x es *una línea equipotencial y que la velocidad* $V_\infty = Ve^{i\alpha}$. ¿Es *siempre* posible una corriente de este tipo?

1302. Construya la corriente en todo el z-plano, si se sabe que tiene manantiales-torbellinos $\{(a_k; Q_k, \Gamma_k)\}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ y un doblete $(a; p)$ en el círculo $|z| < R$, que la circunferencial $|z| = R$ es una línea equipotencial y que la velocidad $V_\infty = Ve^{i\alpha}$. ¿Es siempre posible una corriente de este tipo?

1303. Construya en un recinto simplemente conexo D limitado por el contorno C una corriente que tiene manantiales-torbellinos

$\{(a_k;\ Q_k,\ \Gamma_k)\}$ $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ y para la cual C es una linea de corriente. ¿Es siempre posible una corriente de este tipo?

1304. Construya en un recinto D que contiene el punto infinito y está limitado por un contorno C la corriente con manantiales-torbellinos $\{(a_k;\ Q_k,\ \Gamma_k)\}$ $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ y la velocidad dada $V_\infty=Ve^{i\alpha}$, para la cual C es una linea de corriente. ¿Es siempre posible una corriente de este tipo?

En los problemas **1305—1312** se considera la circundación de contornos acotados y no acotados (que deben ser líneas de corriente). Los problemas se resuelven mediante la transformación conforme en el exterior del circulo, en el semiplano superior o en una franja rectilinea.

1305. Construya la circundación de un contorno acotado C con la circulación Γ dada y la velocidad $V_\infty=Ve^{i\alpha}$. ¿Qué transformación realiza el potencial complejo $w(z)$ en el caso en que $\Gamma=0$?

1306. Construya la circundación de la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$:

1) con la velocidad dada V_∞ y sin circulación;
2) con la velocidad dada V_∞ y con la circulación Γ.

1307. Construya la circundación de la placa $|x|\leqslant C$, $y=0$:
1) con la velocidad dada V_∞ y sin circulación;
2) con la velocidad dada V_∞ y con la circulación Γ definida por la condición de que uno de los extremos de la placa es el punto de partida de la corriente (postulado de *Zhukovski—Chaplyguin*).

1308. Construya la circundación del perfil de *Zhukovski*[1] con la velocidad dada V_∞ y con la circulación Γ definida por el postulado de Zhukovski—Chaplyguin (el extremo agudo del perfil debe ser el punto de partida).

En los problemas **1309—1312** construya la circundación de los contornos dados.

1309. De la parábola $y^2=2px$ (por el exterior y por el interior).

1310. *De la rama derecha de la hipérbola* $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (*por* el exterior y por el interior, con la velocidad $V_\infty=0$).

1311. De las semirrectas $-\infty<x<-1$, $y=\pm\pi$.

1312. De las semirrectas $1<|x|<\infty$, $y=0$.

En los problemas **1313—1317** se consideran corrientes periódicas $(V(z+\omega)=V(z))$ y corrientes en franjas curvilíneas (canales). Para construir estas corrientes es preciso transformar conformemente las

[1] Véase el problema **313** y la respuesta al mismo.

franjas curvilíneas en franjas rectilíneas, prolongar las corrientes mediante el principio de simetría y emplear el desarrollo de funciones meromorfas en series de fracciones simples.

En los problemas **1313** y **1314**, para las corrientes periódicas con el potencial complejo dado y en la franja del período, analice las singularidades, construya esquemáticamente las líneas de corriente y las líneas equipotenciales y determine la velocidad en el ∞.

1313. $w=\frac{Q}{2\pi}\ln \operatorname{sen} z$; 2) $w=\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln \operatorname{sen} z$.

1314. $w=\frac{p}{2\pi}\operatorname{ctg} z \ \left(0\leqslant \arg p\leqslant \frac{\pi}{2}\right)$.

1315. En la franja rectilínea $S: 0<x<\omega$ del z-plano construya la corriente, formada por el manantial — torbellino $(a;\ Q,\ \Gamma)$, $a\in S$, que tiene las velocidades dadas $V(x+i\infty)=iV$ y $V(x-i\infty)=iV_1$. ¿Es siempre posible una corriente de este tipo?

Construya esquemáticamente las líneas de corriente y las líneas equipotenciales cuando $\Gamma=0$ ó $Q=0$.

Sugerencia. Prolongue la corriente aplicando el principio de simetría y haga uso del resultado del problema 1313.

1316. En la franja rectilínea S: $0<x<\omega$ del z-plano construya la corriente, formada por el doblete $(a;\ p)$, $a\in S$, que tiene la velocidad dada $V(x\pm i\infty)=iV$. Construya esquemáticamente las líneas de corriente y las líneas equipotenciales.

1317. Construya en la franja curvilínea S del z-plano, limitada por los contornos C_1 y C_2, la corriente que circunda C_1 y C_2, tiene manantiales — torbellinos dados y dobletes en S y tiene las velocidades dadas V_1 y V_2 en los puntos infinitos Ω_1 y Ω_2 de la franja S. Indique las condiciones suficientes para la existencia de una corriente de este tipo.

Una corriente se denomina ***doblemente periódica*** si su velocidad $\overline{w'(z)}$ es una función elíptica.

Se llama ***función elíptica*** una función meromorfa ***doblemente periódica***, de períodos 2ω y $2\omega'$, siendo $\operatorname{Im}\frac{\omega'}{\omega}\neq 0$ $\left(\text{en lo sucesivo se acepta que } \operatorname{Im}\frac{\omega'}{\omega}>0\right)$.

De esta definición se desprende que $f(z+2m\omega+2n\omega')=f(z)$, donde m y n son números enteros cualesquiera o ceros.

El paralelogramo de vértices z_0, $z_0+2\omega$, $z_0+2\omega'$ y $z_0+2\omega+2\omega'$ (z_0 es un punto arbitrario), se denomina ***paralelogramo de períodos***.

Si $f(z)$ es una función elíptica distinta de una constante, posee las siguientes propiedades (teoremas de Liouville):

1) $f(z)$ tiene al menos un polo en ***el paralelogramo de períodos***.

2) la suma de los residuos de $f(z)$ respecto a todos los polos, situados en el paralelogramo de períodos, es igual a cero;

3) la ecuación $f(z)=a$ tiene en el paralelogramo de períodos la misma cantidad de raíces cualquiera que sea el número complejo a, finito o infinito (este número de raíces se llama ***orden*** de la función elíptica);

4) la diferencia entre la suma de todos los ceros y la suma de todos los polos de la función $f(z)$, situados en el paralelogramo de periodos, coincide con uno de sus períodos, es decir

$$\sum \alpha_k - \sum \beta_k = 2\mu\omega + 2\nu\omega' \text{ (}\mu \text{ y } \nu \text{ son números enteros).}$$

Se llama *Sigma función de Weierstrass* a la función entera

$$\sigma(z) = z \prod{}' \left(1 - \frac{z}{\Omega}\right) e^{\frac{z}{\Omega} + \frac{z^2}{2\Omega^2}}, \tag{6}$$

donde $\Omega = 2n\omega + 2m\omega'$ y el producto se toma respecto a todos los Ω diferentes de cero. La función $\sigma(z)$ es impar.

Se llama ***Zeta función de Weierstrass*** a la función meromorfa

$$\zeta(z) = \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} = \frac{1}{z} + \sum{}' \left(\frac{1}{z-\Omega} + \frac{1}{\Omega} + \frac{z}{\Omega^2}\right), \tag{7}$$

donde la suma se toma respecto a todos los Ω diferentes de cero. La función $\zeta(z)$ es impar.

La función de Weierstrass $\wp(z)$ de periodos 2ω y $2\omega'$ (véase la pág. 178) está ligada a $\zeta(z)$ madiante la relación $\wp(z) = -\zeta'(z)$.

Como

$$[\zeta(z+2\omega) - \zeta(z)]' = \wp(z) - \wp(z+2\omega) = 0,$$

se tiene

$$\zeta(z+2\omega) - \zeta(z) = 2\eta$$

y análogamente

$$\zeta(z+2\omega') - \zeta(z) = 2\eta',$$

donde η y η' son constantes. Valiéndose de que la función $\zeta(z)$ es impar, es fácil probar que $\eta = \zeta(\omega)$ y $\eta' = \zeta(\omega')$.

Las magnitudes η, η', ω y ω' están ligadas por la relación de *Legendre*

$$\eta\omega' - \eta'\omega = \frac{\pi i}{2}.$$

Tomemos

$$\eta = \eta_1, \quad \eta' = \eta_3 \quad \text{y} \quad \eta + \eta' = \eta_2,$$
$$\omega = \omega_1, \quad \omega' = \omega_3 \quad \text{y} \quad \omega + \omega' = \omega_2.$$

Las funciones $\sigma_k(z)$ se definen mediante las relaciones

$$\sigma_k(z) = -e^{\eta_k z} \frac{\sigma(z-\omega_k)}{\sigma(\omega_k)} \quad (k = 1, 2, 3). \tag{8}$$

Respectivamente,

$$\zeta_k(z) = \frac{\sigma_k'(z)}{\sigma_k(z)}. \tag{9}$$

Las funciones $\sigma_k(z)$ están ligadas a la función de Weierstrass $\wp(z)$ y a las funciones de Jacobi sn z, cn z y dn z mediante las siguientes fórmulas

$$\sqrt{\wp(z) - e_k} = \frac{\sigma_k(z)}{\sigma(z)}, \tag{10}$$

$$\operatorname{sn} u = \sqrt{e_1 - e_3}\, \frac{\sigma(z)}{\sigma_3(z)}, \quad \operatorname{cn} u = \frac{\sigma_1(z)}{\sigma_3(z)}, \quad \operatorname{dn} u = \frac{\sigma_2(z)}{\sigma_3(z)}, \tag{11}$$

donde $u = z\sqrt{e_1 - e_3}$ y $e_k = \wp(\omega_k)$ (véase la pág. 179).

Mediante $\sigma(z)$ y $\zeta(z)$ se puede expresar cualquier función elíptica.

Si $f(z)$ tiene en el paralelogramo de períodos solamente polos simples b_k de residuos A_k $(k=1, 2, \ldots, n)$, se tiene

$$f(z)=\sum_{k=1}^{n} A_k \zeta(z-b_k)+C. \qquad (12)$$

Si $f(z)$ tiene en el paralelogramo de períodos ceros a_k y polos b_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ cada uno de los cuales se escribe tantas veces cuanta multiplicidad tiene, es

$$f(z)=C\frac{\sigma(z-a_1)\,\sigma(z-a_2)\ldots\sigma(z-a_n)}{\sigma(z-b_1^*)\,\sigma(z-b_2)\ldots\sigma(z-b_n)}, \qquad (13)$$

donde $b_1^*=\sum_{k=1}^{n} a_k-\sum_{k=2}^{n} b_k$.

Se llama *Theta funciones de Jacobi* a las funciones

$$\vartheta_1(v)=i\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2n-1)\pi i v}=$$

$$=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\operatorname{sen}(2n+1)\pi v, \qquad (14)$$

$$\vartheta_2(v)=\vartheta_1\left(v+\frac{1}{2}\right),\quad \vartheta_3(v)=q^{\frac{1}{4}}e^{\pi i v}\vartheta_1\left(v+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}\right),$$

$$\vartheta_4(v)=-iq^{\frac{1}{4}}e^{\pi i v}\vartheta_1\left(v+\frac{\tau}{2}\right), \qquad (15)$$

donde $q=e^{\pi i\tau}$ y $\tau=\omega'/\omega$.

Las Theta funciones están ligadas a las Sigma funciones por relaciones de tipo

$$\sigma(z)=2\omega_1 e^{\frac{\eta_1 z^2}{2\omega_1}}\frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_1'(0)} \qquad (16)$$

$$\sigma_i(z)=e^{\frac{\eta_1 z^2}{2\omega_1}}\frac{\vartheta_{i+1}(v)}{\vartheta_{i+1}(0)} \qquad (i=1,\ 2,\ 3), \qquad (17)$$

donde $z=2\omega_1 v$.

La ventaja de las Theta funciones consiste en la rápida convergencia de las series que las determinan. Empleando la fórmula (16), la representación (13) se puede escribir en la forma

$$f(z)=C\frac{\vartheta_1\left(\frac{z-a_1}{2\omega}\right)\vartheta_1\left(\frac{z-a_2}{2\omega}\right)\ldots\vartheta_1\left(\frac{z-a_n}{2\omega}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{z-b_1^*}{2\omega}\right)\vartheta_1\left(\frac{z-b_2}{2\omega}\right)\ldots\vartheta_1\left(\frac{z-b_n}{2\omega}\right)}. \qquad (18)$$

Empleando las fórmulas (11), (16) y (17), se puede obtener la expresión de las funciones de Jacobi $\operatorname{sn} z$, $\operatorname{cn} z$ y $\operatorname{dn} z$ a través de las Theta funciones.

En lo sucesivo se supone que ω es un número real y que ω' es un número imaginario puro, es decir, que los paralelogramos de períodos son rectángulos.

1318. Demuestre que la función

$$f(u)=\frac{M}{2\pi}\zeta(u-\alpha)+Cu$$

es el potencial complejo de una corriente doblemente periódica con un doblete (α; M) (M es el momento del doblete) en el paralelogramo de períodos.

Considere, en particualar, los casos en que:

1) $\alpha=0$ y las curvas $\operatorname{Im} u=\pm\operatorname{Im}\omega'$ son lineas de corriente; construya esquemáticamente las lineas de corriente y las lineas equipotenciales; investigue la transformación conforme que realiza la función $t=f(u)$.

2) $f(u+2\omega)=f(u)$; construya esquemáticamente las lineas de corriente y las lineas equipotenciales e investigue la transformación conforme $t=f(u)$.

1319. Demuestre que las corrientes definidas por los potenciales complejos $\zeta_k(u)$ ($k=1$, 2, 3) se reducen mediante traslaciones en los planos u y ζ a las corrientes del problema **1318** (con $C=0$).

Sugerencia. Haga uso de las fórmulas (8) y (9).

1320. Demuestre que las corrientes definidas por los potenciales complejos

$$\frac{\vartheta_k'\left(\frac{u}{2\omega}\right)}{\vartheta_k\left(\frac{u}{2\omega}\right)} \quad (k=1,\ 2,\ 3,\ 4) \text{ y } Z(u)$$

(véase la pág. 176) se reducen mediante transformaciones lineales a las corrientes del problema **1318**, 2).

1321. Demuestre que la corriente definida por el potencial complejo $E(u)$ (véase la pág. 176) se reduce mediante transformaciones lineales a la corriente del problema **1318**, 1).

Sugerencia. Demuestre previamente las relaciones

$$K^2=(e_1-e_3)\,\omega^2 \text{ y } \frac{E}{K}=\frac{e_1}{e_1-e_3}+\frac{\omega}{K^2}\eta.$$

1322. Halle el potencial complejo $f(u)$ de una corriente doblemente periódica con dos dobletes (α; M) y (β; N) en el paralelogramo de períodos.

Analice en qué caso la función $f(u)$ será elíptica y las curvas $\operatorname{Im} u=\pm\operatorname{Im}\omega'$, $\operatorname{Re} u=\pm\omega$ serán lineas de corriente y líneas equipotenciales (o viceversa); construya esquemáticamente las líneas de corriente y las líneas equipotenciales.

En los problemas **1323—1325** investigue las corrientes doblemente periódicas definidas por los potenciales complejos $f(u)$ dados.

1323. $\operatorname{sn} u$. **1324.** $\operatorname{cn} u$. **1325.** $\operatorname{dn} u$.

1326. Halle el potencial complejo $f(u)$ de una corriente doblemente periódica con dos manantiales-torbellinos (α; Q, Γ) y (β; $-Q$, $-\Gamma$) en el paralelogramo de periodos. Considere, en particular, los casos en que $\alpha=0$, $\alpha=\omega$, $\alpha=\omega+\omega'$ y $\beta=\omega'$.

Halle la forma de la función $f(u)$ que satisface la condición $f(u+2\omega)=f(u)$.

En los problemas 1327—1329 investigue las corrientes definidas por los potenciales complejos $f(u)$ indicados.

1327. 1) $\ln \operatorname{sn} u$; 2) $\ln \operatorname{cn} u$;) $\ln \operatorname{dn} u$. **1328.** $\wp(u)$.

1329. $\ln \vartheta_k(v)\left(v=\frac{u}{2\omega},\ k=1,\ 2,\ 3,\ 4\right)$.

Para construir un potencial complejo $f(z)$ en un recinto doblemente conexo D, éste suele primero transformarse conformemente en un anillo circular $R: \rho<|t|<1$ ($\mu=1/\rho$ es el módulo de D); a su vez, el anillo R con el corte radial $[\rho, 1]$ se transforma mediante la función $t=e^{\pi u i/\omega}$ en un rectángulo de vértices 0, 2ω, $2\omega+\omega'$ y ω' del u-plano de manera que los bordes del corte se transforman en los lados laterales y $\tau=\frac{\omega'}{\omega}=\frac{i}{\pi}\ln\frac{1}{\rho}$. Las características de la corriente en el rectángulo se determinan siguiendo el método de solución del problema 1289. Como las bases del rectángulo son líneas de corriente, la corriente se prolonga a través de ellas por el principio de simetría (véase el problema 1291). Después se determina el potencial complejo $\Phi(u)$ de la corriente doblemente periódica de periodos 2ω y $2\omega'$ obtenida; entonces $f(z)=\Phi[u(z)]$ (véase el libro de *L. I. Sedov* señalado en la pág. 181).

1330. Halle el potencial complejo de la corriente:

1) en el anillo circular R: $r_1<|z|<r_2$ con las circulaciones Γ a lo largo de las circunferencias frontera;

2) en un recinto cualquiera D[1] acotado y doblemente conexo con las circulaciones Γ a lo largo de los contornos frontera;

3) en el exterior de los círculos sin puntos comunes con las circulaciones $\pm\Gamma$ en las circunferencias frontera y con la condición $V_\infty=0$;

4) en un recinto doblemente conexo D, que contiene el punto infinito, con las circulaciones $\pm\Gamma$ a lo largo de los contornos frontera y con la condición $V_\infty=0$.

1331. Construya en el anillo circular R: $\rho<|z|<1$ la corriente, formada por el doblete $(a;\ p)$ $(\rho<a<1)$, que circunda sin circulación los contornos frontera. Investigue la transformación $t=f(z)$ y construya el esquema de la posición de las líneas de corriente.

Sugerencia. Haga uso de las soluciones de los problemas 1289, 1) y 1322.

1332. Construya en un recinto doblemente conexo D que contiene el punto infinito la corriente que circunda sin circulación los contornos frontera y que tiene en el ∞ la velocidad $V_\infty=Ve^{i\alpha}$.

1333. Construya en el anillo circular R: $\rho<|z|<1$ la corriente, formada por un doblete y un cuadriplete situados en el punto $z=1$, que circunda sin circulación las circunferencias frontera. Construya las líneas de corriente e investigue la transformación $t=f(z)$. Considere, en particular, el caso en que sólo hay un doblete.

---

[1] Aquí y en lo sucesivo se supone conocida la función que transforma el recinto D en un anillo.

Sugerencia. Represente el potencial complejo $f(z)$ en la forma

$$f(z)=\frac{c_{-2}}{(z-1)^2}+\frac{c_{-1}}{(z-1)}+c_0+c_1(z-1)+\dots$$

y examine qué valores de c_{-2} y c_{-1} son posibles.

1334. 1) Construya en el anillo circular $R: \rho<|z|<1$ la corriente, formada por el torbellino $(a; \Gamma)$ $(\rho<a<1)$, que circunda las circunferencias frontera con las circulaciones Γ_1 (a lo largo de la circunferencia $|z|=1$) y Γ_2 (a lo largo de la circunferencia $|z|=\rho$). ¿Pueden escogerse arbitrariamente Γ, Γ_1 y Γ_2? Considere, en particular, los casos en que $\Gamma_2=0$ y $\Gamma_2=-\Gamma_1$.

Investigue las transformaciones que realizan las funciones $t=f(z)$, $\mathfrak{Z}=e^{2\pi it/\Gamma}$ en el primer caso y las funciones $t=f(z)$, $\mathfrak{Z}=e^{-4\pi it/\Gamma}$ y $s=\sqrt{\mathfrak{Z}-\mathfrak{Z}_0}$ $(\mathfrak{Z}_0=-e^{4\pi\psi_0/\Gamma}$, donde ψ_0 es el valor de la función de corriente en el punto crítico) en el segundo caso. Construya en el plano u las líneas de corriente y las líneas equipotenciales.

2) Construya en un recinto doblemente conexo D que contiene el punto infinito la corriente que circunda los contornos frontera con las circulaciones Γ_1 y Γ_2 y que tiene la velocidad $V_\infty=Ve^{i\alpha}$.

§ 2. APLICACIONES A LA ELECTROSTATICA

Un campo electrostático plano de intensidad $E=E_x+iE_y=Ee^{i}$ se caracteriza por una función analítica $w(z)=u+iv$ llamada *potencial complejo*; v se llama *función potencial* (¡es siempre uniforme!) y u, *función de fuerza*. Las curvas $v=\text{const}$ se llaman *líneas equipotenciales* y las curvas $u=\text{const}$, *líneas de fuerza del campo*. Se tiene

$$E=-\operatorname{grad} v=-\overline{iw'(z)},\quad E=|w'(z)|,\quad \alpha=-\frac{\pi}{2}-\arg w'(z),$$

$$E_x=-\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y},\quad E_y=-\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial u}{\partial x}.$$

En todos los problemas de este párrafo, en los que se trata de campos electrostáticos en recintos limitados por uno o varios contornos frontera, se supone que a lo largo de cada contorno simple la función potencial es constante (es decir, cada contorno de este tipo es un conductor).

Si a es un polo de $w'(z)$ y para w existe en una vecindad de a el desarrollo

$$w(z)=\frac{c_{-n}}{(z-a)^n}+\dots+\frac{pi}{z-a}+2qi\ln\frac{1}{z-a}+c_0+c_1(z-a)+\dots,$$

el término $2qi\ln\frac{1}{z-a}$ define en el punto a una carga puntual plana de magnitud $p=2q$, designada $(a; 2q)$ (en este caso a una unidad de longitud de un conductor rectilíneo perpendicular en el punto a al z-plano corresponde en el espacio la carga q); el término $pi/(z-a)$ define en el punto a un *dipolo* de momento p, designado $(a; p)$ (p es un número complejo; el argumento de $\bar{p}$ determina la dirección del eje del dipolo); los restantes términos $c_{-k}/(z-a)^k$ $(k=2, \dots, n)$ definen en el punto a *multipolos* de orden $2k$.

Respectivamente, si en el ∞ se tiene

$$w(z)=c_nz^n+\dots+piz+2qi\ln z+c_0+\frac{c_{-1}}{z}+\dots,$$

el término $2qi \ln z$ define en el ∞ una carga puntual plana de magnitud $\rho = 2q$ y el término piz, un dipolo de momento p.

Si la función $w = u + iv$ se considera a la vez como el potencial complejo del campo electrostático $E = -\overline{iw'(z)}$ y como el potencial complejo de la corriente de un líquido con la velocidad $V = \overline{w'(z)}$, esto conduce a la siguiente analogía electrohidrodinámica:

	Corriente de un líquido	Campo electrostático
u	Función potencial	Función de fuerza
$u = \text{const}$	Líneas equipotenciales	Líneas de fuerza
v	Función de corriente (puede ser multiforme)	Función potencial (siempre uniforme)
$v = \text{const}$	*Líneas de corriente*	*Líneas equipotenciales*
$v_2 - v_1$	Consumo del líquido	Diferencia de potencial
$\oint du$	*Circulación* $\Gamma = \oint V_s\, ds$	Flujo $N = \oint E_n\, ds$
—	Torbellino $(a;\ \Gamma)$	Carga puntual $(a;\ 2q)$ $q = \Gamma/4\pi$
—	*Manantial*	—
—	Dipolo de momento p	Dipolo de momento $p/2\pi i$
—	Circundación con torbellinos y dipolos dados	Campo con cargas, dipolos y líneas equipotenciales frontera dados

En los problemas **1335—1342** hay que determinar a partir de los potenciales complejos dados $w(z)$ las funciones potencial y de fuerza, la intensidad del campo, el carácter de las singularidades (entre ellas, también en el ∞), así como construir esquemáticamente las familias de las líneas equipotenciales y de fuerza (q es *un número real*). *Compare con las soluciones de los problemas* **1272—1285.**

1335. $w = cz$ $(c = \alpha + i\beta)$. **1336.** $w = 2qi \ln \frac{1}{z}$. **1337.** $w = 2qi \ln \times$ $\times \frac{z-a}{z-b}$. **1338.** $w = 2qi \ln (z^2 - a^2)$ $(a > 0)$.

1339. $w = \frac{pi}{z}$ $(p = |p| e^{i\alpha})$. **1340.** $w = z \pm \frac{R^2}{z}$.

1341. $w = piz + 2qi \ln \frac{1}{z}$ $(p > 0,\ q > 0)$.

1342. $w = piz + 2i \sum_{k=1}^{n} q_k \ln \frac{1}{z - a_k} (p > 0,\ q_k > 0,\ a_1 < a_2 \ldots < a_n)$.

1343. Halle la ley de variación de una carga puntual $(a;\ 2q)$ y de un dipolo $(a;\ p)$:

1) *en una transformación conforme* univalente;

2) en la prolongación según el principio de simetría a través de una parte rectilínea o circular de una línea equipotencial.

1344. Pruebe que el potencial complejo de un campo electrostático, formado en un recinto simplemente conexo D cualquiera por la carga puntual $(a;\ 2q)$, se define mediante la fórmula

$$w = 2qi \ln \frac{1}{f(z,\ a)} + c,$$

donde $f(z,\ a)$ es la función que transforma conformemente el recinto D en el círculo unidad de manera que $f(a,\ a) = 0$ y c es una constante real.

Establezca la relación entre la función potencial $v(z)$ y la función de Green del recinto D (véase el problema **1043**).

En los problemas **1345—1351** halle, empleando los resultados del problema **1344** o el principio de simetría, los potenciales complejos de los campos electrostáticos, formados por las cargas puntuales dadas en los recintos indicados.

1345. En el semiplano superior $\operatorname{Im} z > 0$ por la carga $(z_0;\ 2q)$.

1346. 1) En el círculo $|z| < R$ por la carga $(z_0;\ 2q)$; 2) en el exterior del círculo $|z| > R$ por la carga $(z_0;\ 2q)$.

1347. En el exterior de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ por la carga $(\infty,\ 2q)$.

1348. En el exterior del segmento $|x| < R,\ y = 0$ por la carga $(\infty,\ 2q)$.

1349. En el exterior del cuadrado $|x| < d,\ |y| < d$ por la carga $(\infty;\ 2q)$.

1350. En el rectángulo $|x| < a,\ |y| < b$ por la carga $(0,\ 2q)$.

1351. En el rectángulo $0 < x < 2a,\ 0 < y < 2b$ por la carga $(z_0;\ 2q)$.

En los problemas **1352—1356** construya los campos electrostáticos formados por los dipolos dados.

1352. En el círculo $|z| < R$ por el dipolo $(a;\ p)$.

1353. En el exterior del círculo $|z| > R$ por el dipolo $(a;\ p)$.

1354. En el exterior del segmento $|x| < R,\ y = 0$ por el dipolo $(\infty;\ p)$.

1355. En el exterior de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ por el dipolo $(\infty; p)$.

1356. En el rectángulo $|x| < a,\ |y| < b$ por el dipolo $(0;\ p)$ $(pi = \rho e^{i\alpha})$.

1357. Demuestre que el campo electrostático, formado en un recinto simplemente conexo cualquiera D por un dipolo $(a;\ p)$, se define por el potencial complejo $w = f(z)$, donde la función $f(z)$ transforma el recinto D en el exterior de un segmento horizontal de manera que $f(a) = \infty$ y que la parte principal de $f(z)$ en el punto a es igual a $\frac{pi}{z-a}$, si $a \neq \infty$, y a piz, si $a = \infty$.

Halle $f(z)$, si se conoce la función $t(z)$ que transforma el recinto D:

1) en el interior del círculo unidad, si $a \neq \infty$, con la particularidad de que $t(a)=0$ y $t'(a)>0$;

2) en el exterior del círculo $|t|>R$, si $a=\infty$, con la particularidad de que $t(\infty)=\infty$ y $t'(\infty)=1$.

1358. Construya en el recinto simplemente conexo D el campo electrostático, formado por cargas puntuales $\{(a_k;\ 2q_k)\}$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ y por el dipolo $(a;\ p)$.

Sea $g(\zeta, z)$ la función de Green del recinto D (véase la pág. 137), cuya frontera Γ se compone de contornos simples y lizos a trozos $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots \Gamma_n$; sea, además, n la normal interior de Γ y supongamos que Γ se recorre en la dirección positiva respecto a D. Si $u(z)$ es una función armónica en el recinto D y continua en Γ, de la fórmula de Green se deduce que

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma} u(\zeta)\frac{\partial g(\zeta, z)}{\partial n}\,ds$$

ó

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\left[u(\zeta)\frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{|\zeta-z|}-\ln\frac{1}{|\zeta-z|}\frac{\partial u(\zeta)}{\partial n}\right]ds.$$

Si el recinto D contiene el punto infinito y la función $u(z)$ es en él armónica debe agregarse a los segundos miembros de las fórmulas mencionadas $u(\infty)$. En este caso, la función de Green $g(z, \infty)$ puede ser representada en una vecindad del punto infinito en la forma

$$g(z, \infty)=\ln|z|+\gamma+o\left(\frac{1}{|z|}\right).$$

La magnitud

$$\gamma=\lim_{z\to\infty}[g(z, \infty)-\ln|z|]$$

se llama *constante de Roben* del conjunto cerrado que representa el complemento de D en el z-plano; la magnitud $e^{-\gamma}$ se llama *capacidad* de este conjunto.

1359. Demuestre las siguientes proposiciones (n es la normal interior):

1) $g(z, a)=\ln\frac{1}{|z-a|}-\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\frac{\partial g(\zeta, a)}{\partial n}\ln\frac{1}{|\zeta-z|}\,ds,$

si $a\neq\infty$;

2) $g(z, \infty)=\gamma-\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\frac{\partial g(\zeta, \infty)}{\partial n}\ln\frac{1}{|\zeta-z|}\,ds$ si $z\in D$ y el recinto D contiene el punto infinito;

3) $\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\frac{\partial g(\zeta, \infty)}{\partial n}\ln\frac{1}{|\zeta-z|}\,ds=\gamma$ si $z\in\overline{D}$ y el recinto D contiene el punto infinito;

4) $\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\frac{\partial g(\zeta, a)}{\partial n}\,ds=1$ si $a\neq\infty$ o si $a=\infty\in D$.

Sugerencia. En el punto 1) haga uso de la propiedad de simetría de la función de Green $g(\zeta, z)=g(z, \zeta)$ y de la representación integral de una función armónica a través de sus valores frontera. En el punto 2) haga uso de la representación integral de la función $\ln|\zeta-z|+g(\zeta, z)-g(\zeta, \infty)$ armónica en D, del paso al límite y de la propiedad de simetría $g(\infty, z)=g(z, \infty)$. En el punto 3) proceda de la misma forma, pero partiendo de la función $\ln|\zeta-z|-g(\zeta, \infty)$ [1].

La función

$$v_0(z)=2q\ln\frac{1}{|z-a|}$$

se llama *potencial logarítmico* de la carga puntual $(a;\ 2q)$. En el z-plano ampliado $v_0(z)$ representa el potencial logarítmico de dos cargas puntuales: $(a;\ 2q)$ y $(\infty;\ -2q)$.

Sea Γ un contorno que verifica las condiciones indicadas en la pág. 196 y sean $\rho(\zeta)$ y $\nu(\zeta)$ reales y continuas a lo largo de Γ.

La integral

$$v(z)=\int_\Gamma \rho(\zeta)\ln\frac{1}{|\zeta-z|}\,ds$$

se llama *potencial logarítmico de una capa simple de densidad de distribución* $\rho(\zeta)$ (en el espacio le corresponde el potencial de una superficie cilíndrica cargada de base Γ y de densidad superficial de carga $\frac{\rho}{2}$, es decir, a un elemento cuadrado de la superficie sobre el arco ds corresponde la carga $\frac{\rho}{2}ds^2$).

La función $v(z)$ es continua en el z-plano finito y armónica en todo punto no perteneciente a Γ, a excepción del punto $z=\infty$, donde tiene una singularidad logarítmica

$$v(z)=-2q\ln|z|+o\left(\frac{1}{|z|}\right),\quad 2g=\int_\Gamma \rho(\zeta)\,ds$$

(esto significa que al potencial $v(z)$ corresponde la carga $(\infty;\ -2q)$).

La integral

$$v_1(z)=\int_\Gamma \nu(\zeta)\frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{|\zeta-z|}\,ds$$

se llama *potencial logarítmico de una capa doble de densidad de distribución* $\nu(\zeta)$; a lo largo de Γ se hallan distribuidos dipolos de ejes orientados según la dirección dada de la normal n a Γ, y según la dirección de la normal interior, si Γ es la frontera de un recinto; $\nu(\zeta)$ es la densidad de distribución de los dipolos). Si $\theta(\zeta, z)$ es el ángulo entre n y el vector que va de ζ a z y $d\varphi(\zeta, z)$ es el ángulo bajo el cual se ve desde z el elemento de arco ds, se tiene

$$v_1(z)=\int_\Gamma \nu(\zeta)\frac{\cos\theta(\zeta, z)}{|\zeta-z|}\,ds=\int_\Gamma \nu(\zeta)\,d\varphi(\zeta, z).$$

En particular, para un contorno cerrado Γ y para $\nu(\zeta)\equiv 1$ se tiene

$$\int_\Gamma \frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{|\zeta-z|}\,ds=\begin{cases}2\pi, & \text{si } z \text{ se halla dentro de } \Gamma,\\ \pi, & \text{si } z \text{ se halla sobre } \Gamma,\\ 0, & \text{si } z \text{ se halla fuera de } \Gamma\end{cases}$$

(véase también el problema 1041).

La función de Green $g(z, a)$ de un recinto D puede ser considerada también como un potencial de un campo electrostático formado por la carga puntual

---

[1] Véase *Nevanlinna R.*, Eindeutige analytische funktionen, Springer, Berlin, 1953, cap. V, § 2.

$(a;\ 1)$, si la frontera Γ del recinto D está conectada con tierra. El problema 1359, 1) demuestra que en el caso en que $a \neq \infty$ la conexión de Γ con tierra equivale a la distribución a lo largo de Γ de una carga de densidad de distribución $\rho(\zeta) = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial g(\zeta,\ a)}{\partial n}$. Además, según el punto 4) del problema 1359, la magnitud total de la carga es igual a -1. En el caso en que $a = \infty$, la carga $(\infty,\ 1)$ y la conexión de Γ con tierra equivalen conjuntamente a la distribución a lo largo de Γ de una carga de densidad de distribución $\rho(\zeta) = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial g(\zeta,\infty)}{\partial n}$ y de magnitud total -1 y a la adición de un campo de potencial constante γ (véase 1359, 2)). En estos casos las distribuciones a lo largo de Γ se llaman *inducidas* por la carga $(a;\ 1)$.

En los problemas **1360—1363** halle la densidad de distribución $\rho(\zeta,\ a)$ a lo largo del contorno Γ inducida por la carga $(a;\ 1)$ y el potencial correspondiente de la capa simple $v(z,\ a)$ para los recintos limitados por el contorno Γ.

1360. Γ es el eje real, $\operatorname{Im} a > 0$.

1361. 1) Γ es la circunferencia $|z| = R$ y $|a| < R$; 2) Γ es la circunferencia $|z| = R$ y $|a| > R$ (considere, en particular, el caso en que $a = \infty$).

1362. Γ es el segmento $|x| \leqslant R$, $y = 0$ del eje real y $a = \infty$.

1363. Γ es la elipse $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ y $a = \infty$.

1364. Considerando conocida la función de Green para un recinto D que contiene el punto $z = \infty$, resuelva *el problema de Roben:* halle la densidad de distribución $\rho(\zeta)$ a lo largo de la frontera Γ del recinto D de una carga unidad que crea fuera de D y a lo largo de Γ un potencial constante[1].

Sugerencia. Véase el problema 1359, 3) y 4).

En los problemas **1365—1367** resuelva el problema de Roben para los recintos dados D.

1365. D es el exterior del círculo $|z| > R$.

1366. D es el exterior del segmento $|x| \leqslant R$, $y = 0$.

1367. D es el exterior de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

En los problemas **1368—1371** halle las capacidades (véase la pág. 196) de los conjuntos cerrados.

1368. $|z| \leqslant R$. **1369.** $|x| \leqslant R$, $y = 0$.

1370. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1$. **1371.** $|z^2 - a^2| \leqslant a^2\ (a > 0)$.

1372. Sea $\varphi(\zeta)$ una función continua real definida y diferenciable a lo largo de un contorno cerrado simple Γ.

---

[1] En el libro de R. Nevanlinna mencionado en la pág. 197 se trata de la solución del problema general de Roben que exige determinar una distribución no negativa de una carga unidad sobre un conjunto dado E tal que el potencial logarítmico correspondiente tome en cada punto del conjunto E un mismo valor constante.

Demuestre que la parte real de la integral de tipo de Cauchy $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$ es un potencial logarítmico de una capa doble de densidad $\varphi(\zeta)$ y que su parte imaginaria es un potencial logarítmico de una capa simple de densidad $-\frac{1}{2\pi}\frac{d\varphi}{ds}$.

1373. Demuestre que toda función $v(z)$ acotada y armónica en el semiplano superior $\operatorname{Im} z>0$ puede ser representada en forma de un potencial logarítmico de una capa doble:

$$v(z)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}v(t)\frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{|t-z|}dt.$$

En cambio, si $v(z)$ es regular en el ∞, puede ser representada también en forma de un potencial logarítmico de una capa simple:

$$v(z)=v(\infty)-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial v(t)}{\partial n}\ln\frac{1}{|t-z|}dt.$$

1374. Halle en el semiplano superior $\operatorname{Im} z>0$ el potencia complejo del campo electrostático, si su potencial $v(z)$ toma a lo largo del eje real valores dados constantes a pedazos. Represente la función potencial en términos de las medidas armónicas de los segmentos correspondientes del eje real (véase la pág. 141):

1) φ en el intervalo $(-\infty, a)$ y 0 en el intervalo (a, ∞);

2) φ en el intervalo (a, b) y 0 en los intervalos $(-\infty, a)$ y (b, ∞);

3) $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ en los intervalos $(-\infty, a_1)$, (a_1, a_2), $\ldots$, (a_{n-1}, a_n) respectivamente y 0 en el intervalo (a_n, ∞) (aquí $a_1<a_2<\ldots<a_n$);

4) φ_0 en el intervalo (a_n, ∞) y $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ en los intervalos $(-\infty, a_1)$, (a_1, a_2), etc., respectivamente.

Sugerencia. En el punto 1) haga uso de la transformación conforme en una franja; en los demás puntos haga uso del método de superposición (se puede también recurrir a la fórmula integral de Schwarz para el semiplano, véase la pág. 141).

1375. Halle los potenciales complejos $w(z)$ y los potenciales $v(z)$ en los recintos doblemente conexos con la diferencia dada $d=v_2-v_1$ de los potenciales v_1 y v_2 de los contornos frontera:

1) en el anillo circular $r_1<|z|<r_2$;

2) en un recinto cualquiera D doblemente conexo.

1376. Demuestre que, si D es un recinto cualquiera doblemente conexo y si la función potencial toma valores constantes (v_1 y v_2)

en cada uno de los contornos que lo limitan, se tiene

$$w(z)=\frac{i(v_2-v_1)}{\ln \mu}\ln t(z)+c+iv_1,$$

$$v(z)=\frac{v_2-v_1}{\ln \mu}\ln|t(z)|+v_1,$$

donde $t(z)$ transforma conformemente D en el anillo $1<|t|<\mu$ μ es el módulo de D) y el contorno frontera de potencial v_1 se convierte en la circunferencia $|t|=1$; c es un número real.

1377. Halle los potenciales complejos en los recintos doblemente conexos indicados (los potenciales v_1 y v_2 de los contornos frontera son constantes).

1) En el exterior de las circunferencias $|z\pm a|=R$ $(a>R)$ (v_1 es el potencial de la circunferencia de la izquierda).

2) En el exterior de las circunferencias $|z|=r_1$ (con el potencial v_1) y $|z-a|=r_2$ $(a>r_1+r_2)$.

3) En el anillo circular no concéntrico comprendido entre las circunferencias $|z|=R$ (con el potencial v_1) y $|z-a|=r$ $(0<a<R-r)$.

4) En la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}<1$ con un corte a lo largo del segmento que une sus focos (el potencial sobre la elipse es v_1).

5) En el exterior de los segmentos $1<|x|<\frac{1}{k}$, $y=0$ $(0<k<1)$. El segmento de la izquierda tiene el potencial v_1.

6) En el exterior de los segmentos $|x|<1$, $y=\pm\pi$. El potencial del segmento superior es v_1.

1378. Sea D un recinto múltiplemente conexo con la frontera Γ compuesta por n contornos Γ_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ suaves a pedazos y sea $\omega_k(z)$ la medida armónica del contorno Γ_k (véase la pág. 141). Si el recinto D es acotado, aceptaremos que Γ_n es su contorno exterior. Demuestre las proposiciones siguientes:

1) Si el recinto D es acotado, se tiene

$$\omega_k(z)=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\frac{\partial\omega_k(\zeta)}{\partial n}\ln\frac{1}{|\zeta-z|}ds \quad (k=1, 2, \ldots, n-1),$$

$$\omega_n(z)=1-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\frac{\partial\omega_n(\zeta)}{\partial n}\ln\frac{1}{|\zeta-z|}ds.$$

Si el recinto D contiene el punto infinito, se tiene

$$\omega_k(z)=\omega_k(\infty)-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\frac{\partial\omega_k(\zeta)}{\partial n}\ln\frac{1}{|\zeta-z|}ds \quad (k=1, 2, \ldots, n).$$

2) Para los puntos z no pertenecientes al recinto D los segundos miembros de las igualdades indicadas en el punto 1) toman el valor 1 en el recinto acotado por Γ_k (respectivamente, por Γ_n) y comple-

mentario de D y el valor 0 en el recinto limitado por Γ_i, $i \neq k$ y complementario de D.

Observación. Según el punto 1) las funciones $\omega_k(z)$ representan en el recinto D los potenciales creados por las cargas de distribución inducidas a lo largo de Γ con las densidades de distribución $\rho_k(\zeta) = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial \omega_k(\zeta)}{\partial n}$.

En el caso en que el recinto D sea acotado, las magnitudes $\omega_1(z), \ldots, \omega_{n-1}(z)$ coinciden exactamente con los potenciales logarítmicos de las distribuciones señaladas inducidas a lo largo de Γ.

Los valores de las cargas de distribución p_{ik}, inducidas a lo largo del contorno Γ_i (i, $k = 1, 2, \ldots, n$) por el potencial $\omega_k(z)$, es decir,

$$p_{ik} = -\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\frac{\partial \omega_k(\zeta)}{\partial n}\,ds = -\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\omega_i\frac{\partial \omega_k(\zeta)}{\partial n}\,ds,$$

se llaman ***constantes de capacidades mutuas*** de los contornos frontera (algunas propiedades de los números p_{ik} se consideran en los problemas **1075—1077**).

1379. Halle las medidas armónicas $\omega_k(z)$, así como las magnitudes $\rho_k(\zeta)$ y p_{ik} definidas en la observación al problema anterior, para:

1) el anillo circular $1 < |z| < \mu$;

2) un recinto cualquiera D doblemente conexo, considerando conocida la función que transforma este recinto en un anillo.

1380. Sea D el recinto del problema **1378** y sea $v(z)$ el potencial acotado del campo electrostático que toma valores constantes α_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) en los contornos frontera (conductores) Γ_k. Demuestre las siguientes proposiciones:

1) $v(z) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \omega_k(z)$.

2) Si el recinto D es acotado y Γ_n es su contorno exterior, se tiene

$$v(z) = \alpha_n - \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\frac{\partial v(\zeta)}{\partial n}\ln\frac{1}{|\zeta - z|}\,ds;$$

en cambio, si D contiene el punto ∞, se tiene

$$v(z) = v(\infty) - \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\frac{\partial v(\zeta)}{\partial n}\ln\frac{1}{|\zeta - z|}\,ds.$$

Demuestre que los segundos miembros de estas fórmulas son iguales a α_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) en los recintos limitados por Γ_k y complementarios a D.

3) Los valores de las cargas de distribución inducidas a lo largo de Γ_i son iguales a

$$2q_i = -\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\frac{\partial v(\zeta)}{\partial n}\,ds = \sum_{k=1}^{n} p_{ik}\alpha_k,$$

siendo $\sum_{i=1}^{n} q_i = 0$.

Sugerencia. Véase el problema 1075, 1).

4) $\frac{1}{2\pi}\iint\limits_D (\operatorname{grad} v)^2\,dx\,dy = \sum_{i,k=1}^{n} p_{ik}\alpha_i\alpha_k.$

Sugerencia. Véase el problema **1076**.

5) Si $w(z)$ es el potencial complejo del campo, para la intensidad de distribución inducida se tiene

$$\rho(\zeta) = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial v(\zeta)}{\partial n} = \pm\frac{1}{2\pi}|w'(\zeta)|.$$

Sea D un recinto cualquiera múltiplemente conexo cuya frontera Γ está compuesta por los contornos de Jordan $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$. Existen transformaciones conformes del recinto D en cada uno de los recintos canónicos siguientes que en las condiciones indicadas se determinan unívocamente (a, b son puntos arbitrarios del recinto D, A es un número complejo arbitrario):

1) En *el plano con cortes paralelos*. La función transformadora $f(z)$ se determina unívocamente, si se especifica su polo b y el coeficiente A del desarrollo

$$f(z) = \begin{cases} \frac{A}{z-b} + c_1(z-b) + \ldots & (b \neq \infty), \\ Az + \frac{c_{-1}}{z} + \ldots & (b = \infty). \end{cases}$$

2) En *el plano con cortes radiales* (así llamaremos el plano con cortes a lo largo de segmentos situados a lo largo de rayos que nacen en el origen de coordenadas) o *con cortes a lo largo de arcos circulares concéntricos* de centro en el origen de coordenadas. La función $f(z)$ se define por su cero a, su polo b y el coeficiente A del desarrollo

$$f(z) = \begin{cases} \frac{A}{z-b} + c_1(z-b) + \ldots & (b \neq \infty), \\ Az + \frac{c_{-1}}{z} + \ldots & (b = \infty). \end{cases}$$

3) En un *círculo con cortes radiales* o *con cortes a lo largo de arcos circulares concéntricos* (de centro en el origen de coordenadas). La función $f(z)$ se define por las condiciones $f(a) = 0$, $f'(a) = 1$ y por la especificación del contorno Γ_k que se transforma en la circunferencia.

4) En un *anillo con cortes radiales* o *con cortes a lo largo de arcos circulares concéntricos* (de centro en el origen de coordenadas). La transformación se define unívocamente, salvo transformaciones de semejanza y rotación, al especificar los contornos que se transforman en las circunferencias frontera interior y exterior.

Véase, por ejemplo, Г. М. Голузин, Геометрическая теория функций комплексного переменного, „Наука“, 1966, гл. V (*Goluzin G. M.*, Teoría geométrica de las funciones de variable compleja).

1381. Considerando conocidas la función que transforma conformemente el recinto D en el plano con cortes paralelos y las medidas armónicas $\omega_k(z)$ de los contornos frontera Γ_k $(k=1, 2, \ldots, n)$[1], halle el potencial del campo electrostático creado en el recinto D por el dipolo $(a; p)$ cuando la frontera Γ del recinto está conectada con tierra.

1382. Considerando conocida la función de Green del recinto D, halle el potencial del campo electrostático en este recinto, formado por una carga puntual $(a; 2q)$ $(a \in D)$ y con potenciales dados α_k en los contornos frontera Γ_k $(k=1, 2, \ldots, n)$. Obtenga la fórmula del problema **1344** para el caso en que el recinto D sea simplemente conexo.

1383. Determine el carácter del campo electrostático definido en un recinto múltiplemente conexo D por el potencial complejo $w=f(z)$, donde $f(z)$ es la función que transforma este recinto en el plano con cortes paralelos al eje real.

1384. Determine el carácter del campo electrostático definido en un recinto D por el potencial complejo $w=2qi\ln\frac{1}{f(z)}$, donde la función $f(z)$ transforma el recinto D en:

1) el plano con cortes a lo largo de arcos circulares concéntricos de centro en el origen de coordenadas;

2) el círculo con cortes a lo largo de arcos circulares concéntricos de centro en el origen de coordenadas;

3) el anillo circular con cortes a lo largo de arcos circulares concéntricos de centro en el origen de coordenadas.

Halle en todos los casos los flujos del vector de intensidad del campo a través de los contornos frontera.

1385. Construya el esquema de disposición de las líneas equipotenciales y de fuerza de un campo electrostático:

1) formado por un dipolo en el ∞ en un recinto infinito doblemente conexo;

2) formado por una carga puntual en un recinto acotado D doblemente conexo.

En ambos casos los potenciales en los contornos frontera son constantes.

1386. 1) Exprese el potencial $v(z)$ del campo electrostático formado en un recinto múltiplemente conexo D por cargas de

---

[1] Tanto una como otras se definen mediante la función de Green; véase, por ejemplo, el § 1 del complemento de *M. Schiffer* al libro: *R. Courant*, Dirichlet's Principle, Conformal Mappings and Minimal Surfaces, Interscience Publ., New York, 1950.

distribución $2q_k$ sobre $\Gamma_k \left(\sum_{k=1}^{n} q_k = 0 \right)$ en términos de las medidas armónicas $\omega_k(z)$ de sus contornos frontera. (A lo largo de cada contorno Γ_k el potencial es constante).

Sugerencia. Haga uso de los resultados del problema **1380**.

2) Exprese el potencial $v(z)$, si $\sum_{k=1}^{n} q_k = q \neq 0$ y hay una carga puntual $(a;\ -2q)$.

Sugerencia. La determinación del potencial $v(z)+2qg(z,\ a)$ se reduce al punto 1).

1387. Halle el potencial $v(z)$ en el anillo circular $r_1 < |z| < r_2$ si los contornos del mismo llevan cargas de distribución $2q_1$ y $2q_2$ dadas y, además, en el caso en que $q_1 + q_2 = q \neq 0$, hay una carga puntual $(a;\ -2q)$.

Sugerencia La función de Green del anillo circular se puede encontrar escogiendo convenientemente las circulaciones en la solución del problema **1334**. Por medio de las mismas también se determinan las cargas de distribución inducidas en los contornos frontera, relacionadas con la función de Green.

§ 8. APLICACIONES AL PROBLEMA PLANO DE CONDUCCIÓN DE CALOR

El problema plano sobre la distribución estacionaria de la temperatura en un cuerpo se caracteriza por una función analítica $w(z) = u + iv$ (u es la temperatura) llamada *potencial complejo del campo térmico*. El vector $Q = -k$ grad $u = -k\overline{w'(z)}$ (k es el coeficiente de conducción térmica que en lo sucesivo se considera constante) se llama *vector de flujo del calor*. El flujo de calor a través del contorno C es igual a

$$\int_C Q_n\, ds = -k \int_C \frac{\partial u}{\partial n}\, ds = -k \int_C dv$$

(n es la normal exterior al contorno C recorrido en la dirección positiva). Como la función u es uniforme, el flujo de calor para un contorno cerrado C es también igual a $ik \int_C w'(z)\, d'z$. Si en una vecindad del punto a se tiene

$$w(z) = \left[\ldots + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + \ldots \right] + \frac{q}{2\pi k} \ln \frac{1}{z-a},$$

el término $\frac{q}{2\pi k} \ln \frac{1}{z-a}$ define en el punto a *un manantial* $(a;\ q)$ de potencia q y el término $\frac{c_{-1}}{z-a}$ define en el punto a *un doblete*.

Tiene lugar la siguiente analogía con la corriente de un fluido y con el campo electrostático:

	Campo térmico	Corriente de un fluido	Campo electrostático
Potencial complejo	$w(z) = u + iv$	$w(z) = u + iv$	$iw(z) = -v + iu$
Vector del campo	$Q = -k \operatorname{grad} u = -k\overline{w'(z)}$	$V = \operatorname{grad} u = \overline{w'(z)}$	$E = -\operatorname{grad} u = \overline{w'(z)}$
u	Temperatura	Función potencial	Función potencial
$u = \text{const}$	Línea isotermas	Líneas equipotenciales	Líneas equipotenciales
v	Función de corriente	Función de corriente	$-v$, función de fuerza
$v = \text{const}$	Líneas de corriente Manantial $(a;\ q)$ Doblete El campo térmico con manantiales, dobletes y contornos frontera isotérmicos dados	Líneas de corriente Manantial $(a;\ -q/k)$ Doblete La corriente, definida por el potencial complejo $iw(z)$ con torbellinos y dobletes dados que circunda los contornos frontera	Líneas de fuerza Carga puntual $(a;\ q/2\pi k)$ Dipolo El campo con cargas, dípolos y contornos frontera equipotenciales dados

1388. Formule el principio de simetría para la prolongación de un manantial de calor a través de una parte rectilínea o circular de la frontera del recinto. Halle la distribución de la temperatura en un recinto cualquiera D simplemente conexo, si se sabe que en el interior de este recinto hay un manantial $(a;\ q)$ y que la temperatura en la frontera tiene un valor constante C.

En los problemas **1389—1392** halle la distribución de la temperatura en los recintos indicados a partir de los manantiales dados, suponiendo que la temperatura es constante a lo largo de la frontera.

1389. En el semiplano superior $\operatorname{Im} z > 0$; el manantial es $(a;\ q)$.

1390. En el círculo $|z| < R$; el manantial es $(a;\ q)$.

1391. En la semifranja $|x| < a$, $y > 0$ con el manantial $(ih;\ q)$ $(h > 0)$.

1392. En el rectángulo $|x| < a$, $|y| < b$ con el manantial $(0;\ q)$.

1393. 1) Interprete la función de Green $g(z, a)$ de un recinto plano D en términos de la teoría de conducción de calor.

2) Suponiendo conocida la función de Green del recinto D halle la distribución de la temperatura en este recinto, si se sabe que D tiene un manantial $(a;\ q)$ y que en los contornos frontera

Γ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ la temperatura tiene valores constantes u_k. Exprese la respuesta en términos de las medidas armónicas $\omega_k(z)$ de los contornos frontera.

1394. Halle la distribución de la temperatura en el interior de un anillo circular $r_1 < |z| < r_2$, si se sabe que en el interior del anillo hay un manantial $(a; q)$ y que en las circunferencias frontera la temperatura tiene valores constantes: u_1 en la circunferencia $|z| = r_1$ y u_2 en la circunferencia $|z| = r_2$.

Sugerencia. Véase los problemas análogos 1334 y 1387.

CAPITULO XI

GENERALIZACION DE FUNCIONES ANALITICAS

En este capítulo se emplean las notaciones introducidas en el § 5 del capítulo I para las derivadas formales según Cauchy. También para las diferenciales se emplean las notaciones correspondientes: $d\bar{z} = dx - i\,dy = \overline{dz}$, $d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz + \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}}d\bar{z}$

§ 1. TRANSFORMACIONES CASICONFORMES

Se llaman *características* de una elipse la razón p de sus semiejes ($p \geqslant 1$) y, si $p \neq 1$, el ángulo θ ($0 \leqslant \theta < \pi$) que el eje mayor de la elipse forma con el eje Ox.

1395. Demuestre que la ecuación de la elipse de centro en el origen de coordenadas, cuyo eje menor es h y cuyas características son p y θ, puede ser representada en la forma

$$\gamma x^2 - 2\beta xy + \alpha y^2 = ph^2,$$

donde $\alpha = p\cos^2\theta + \frac{1}{p}\operatorname{sen}^2\theta$, $\beta = \left(p - \frac{1}{p}\right)\cos\theta\operatorname{sen}\theta$, $\gamma = p\operatorname{sen}^2\theta + \frac{1}{p}\cos^2\theta$, o en la forma

$$|z + \mu\bar{z}| = \lambda$$

donde

$$\mu = -\frac{p-1}{p+1}e^{2i\theta}, \quad \lambda = \frac{2ph}{p+1}.$$

Las magnitudes α, β y γ del problema 1395 también se llaman características de la elipse. Están ligadas por la relación $\alpha\gamma - \beta^2 = 1$. La magnitud μ se llama característica compleja de la elipse. Notemos que $|\mu| < 1$. En el caso del círculo $\mu = 0$, $p = 1$, $\alpha = \gamma = 1$, $\beta = 0$.

1396. Demuestre las siguientes relaciones entre las diferentes características de la elipse:

1) $p = \frac{1+|\mu|}{1-|\mu|} = \frac{\alpha+\gamma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)^2 + \beta^2}$, $p + \frac{1}{p} = \alpha + \beta$;

2) $2\theta = \arg\mu + \pi$ ($-\pi \leqslant \arg\mu < \pi$);

3) $\begin{cases} \operatorname{tg} 2\theta = \dfrac{2\beta}{\alpha-\gamma}, \\ \operatorname{tg}\theta = \dfrac{\gamma-\alpha+\sqrt{(\gamma-\alpha)^2+4\beta^2}}{2\beta}; \end{cases}$

4) $\begin{cases} (1-|\mu|^2)\alpha = 1+2|\mu|\cos 2\theta+|\mu|^2, \\ (1-|\mu|^2)\beta = 2|\mu|\operatorname{sen} 2\theta, \\ (1-|\mu|^2)\gamma = 1-2|\mu|\cos 2\theta+|\mu|^2; \end{cases}$

5) $\dfrac{1}{p} \leqslant \alpha,\ \gamma \leqslant p;\ |\beta| \leqslant \dfrac{1}{2}\left(p-\dfrac{1}{p}\right)$.

Demuestre las siguientes relaciones entre las características de dos elipses:

6) $|p_2-p_1| \leqslant |\alpha_2-\alpha_1|+|\beta_2-\beta_1|+|\gamma_2-\gamma_1|$;

7) $\begin{cases} |\alpha_2-\alpha_1| \leqslant |p_2-p_1|+\sqrt{\left(p_2-\dfrac{1}{p_2}\right)\left(p_1-\dfrac{1}{p_1}\right)}\operatorname{sen}|\theta_2-\theta_1|, \\ |\beta_2-\beta_1| \leqslant |p_2-p_1|\left(1+\dfrac{1}{p_2p_1}\right)+ \\ \qquad +2\sqrt{\left(p_2-\dfrac{1}{p_2}\right)\left(p_1-\dfrac{1}{p_1}\right)}\operatorname{sen}|\theta_2-\theta_1|, \\ |\gamma_2-\gamma_1| \leqslant |p_2-p_1|+\sqrt{\left(p_2-\dfrac{1}{p_2}\right)\left(p_1-\dfrac{1}{p_1}\right)}\operatorname{sen}|\theta_2-\theta_1|; \end{cases}$

8) $|\mu_2-\mu_1| \leqslant \big||\mu_2|-|\mu_1|\big|+2\sqrt{|\mu_2\mu_1|}\operatorname{sen}|\theta_2-\theta_1|$;

$\left|\dfrac{\mu_2-\mu_1}{1-\bar{\mu}_1\mu_2}\right| \leqslant \dfrac{|p_2-p_1|}{p_2+p_1}+\sqrt{(p_2-1)(p_1-1)}\operatorname{sen}|\theta_2-\theta_1|$.

Sugerencia. Para la demostración de las desigualdades 6), 7) y 8) resultan útiles las desigualdades de tipo

$$|r_2\cos\lambda_2-r_1\cos\lambda_1| \leqslant |r_2e^{i\lambda_2}-r_1e^{i\lambda_1}| \leqslant |r_2-r_1|+2\sqrt{r_2r_1}\operatorname{sen}|\lambda_2-\lambda_1|,$$
$$\big||a_2+ib_2|-|a_1+ib_1|\big| \leqslant |a_2-a_1|+|b_2-b_1|.$$

La transformación $w=f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ se llama *afín*, si

$$u=a_1x+b_1y+c_1,\quad v=a_2x+b_2y+c_2. \qquad (1)$$

El jacobiano de esta transformación es $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix}$. Si $\Delta=0$, la transformación *es degenerada.*

1397. Demuestre las siguientes propiedades de las transformaciones afines:

1) Una transformación afín puede ser representada en la forma

$$w=Az+B\bar{z}+C.$$

Exprese los coeficientes A, B y C por medio de los coeficientes de la transformación (1) y pruebe que $\Delta=|A|^2-|B|^2$. 2) Si $\Delta\neq 0$, existe la transformación inversa

$$z=A_1w+B_1\bar{w}+C_1.$$

Exprese sus coeficientes por medio de los coeficientes de la transformación (1) y pruebe que $\Delta_1 = |A_1|^2 - |B_1|^2 = 1/\Delta$.

3) Si $\Delta \neq 0$, la transformación conserva la paralelidad de las rectas y transforma elipses en elipses. Las elipses con la característica compleja $\mu = B/A$, para $\Delta > 0$, y $\mu = \overline{A}/\overline{B}$, para $\Delta < 0$, se transforman en circunferencias.

Las circunferencias se transforman en circunferencias sólo para las transformaciones ortogonales $w = Az + C$ ó $w = B\bar{z} + C$.

4) Si $\Delta > 0$, la transformación conserva la dirección del recorrido; si $\Delta < 0$, la transformación cambia la dirección del recorrido por la contraría.

5) Si $\Delta = 0$ pero no todos los coeficientes a_1, b_1, a_2, b_2 son iguales a cero, la transformación se puede representar en la forma

$$w = 2|A|e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}|z|\cos\left(\varphi + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) + C,$$

donde $\varphi = \arg z$, $\alpha = \arg A$, $\beta = \arg B$. Indique el significado geométrico de esta transformación.

Se llaman características de una transformación afín las características (p, θ), (α, β, γ) y la característica compleja μ de las elipses que se transforman en círculos (véase el problema **1397**, 3)).

Se llaman características de una transformación continuamente diferenciable

$$w = u(x, y) + iv(x, y)$$

de jacobiano $J > 0$ las características $p(z)$, $\theta(z)$; $\alpha(z)$, $\beta(z)$, $\gamma(z)$ y la característica compleja $\mu(z)$ de la transformación afín

$$du = u_x\,dx + u_y\,dy, \quad dv = v_x\,dx + v_y\,dy$$

ó

$$dw = w_z\,dz + w_{\bar{z}}\,d\bar{z}.$$

En esta transformación, a un círculo infinitamente pequeño

$$du^2 + dv^2 = d\rho^2$$

le corresponde una elipse infinitamente pequeña

$$\gamma\,dx^2 - 2\beta\,dx\,dy + \alpha\,dy^2 = p\,dh^2$$

(dh es el eje menor) o, en otra forma,

$$|dz + \mu d\bar{z}| = \frac{2p}{p+1}\,dh.$$

1398. Demuestre que para una transformación afín no degenerada tienen lugar las relaciones

$$\frac{\gamma}{a_1^2 + a_2^2} = \frac{-\beta}{a_1 b_1 + a_2 b_2} = \frac{\alpha}{b_1^2 + b_2^2} = \frac{1}{|\Delta|}.$$

1399. Demuestre que para las características de una transformación continuamente diferenciable de jacobiano positivo son válidas las relaciones

1) $\dfrac{\gamma}{u_x^2+v_x^2}=\dfrac{-\beta}{u_xu_y+v_xv_y}=\dfrac{\alpha}{u_y^2+u_y^2}=\dfrac{pdh^2}{d\rho^2}=\dfrac{1}{J}$;

2) $u_x^2+u_y^2+v_x^2+v_y^2=J\left(p+\dfrac{1}{p}\right)$;

3) $p=\text{máx}\left|\dfrac{dw}{dz}\right| / \text{mín}\left|\dfrac{dw}{dz}\right|=\dfrac{|w_z|+|w_{\bar z}|}{\| w_z|-|w_{\bar z}\|}$;

4) $\mu=w_{\bar z}/w_z=-\dfrac{p-1}{p+1}e^{2i\theta}$;

5) $\sqrt{\dfrac{J}{p}}\leqslant\left|\dfrac{dw}{dz}\right|\leqslant\sqrt{pJ}$.

Una transformación univalente continuamente diferenciable $w=u+iv$ de jacobiano positivo se llama *transformación casiconforme con las características* $p(z)$, $\theta(z)$ o $\alpha(z)$, $\beta(z)$, $\gamma(z)$ *o* $\mu(z)$, si transforma elipses infinitamente pequeñas de estas características en círculos infinitamente pequeños.

1400. Demuestre que una transformación casiconforme satisface el sistema de ecuaciones

$$\alpha u_x+\beta u_y=v_y,\quad \beta u_x+\gamma u_y=-v_x$$

o, empleando la forma compleja, la ecuación

$$w_{\bar z}=\mu w_z.$$

Sugerencia. A la ecuación $|dz+\mu d\bar z|=\text{const}$ le corresponde la ecuación $|dw|=\text{const}$.

Observación. Las ecuaciones indicadas en el problema se llaman *ecuaciones de Beltrami. La característica* μ *se llama coeficiente de Beltrami.*

1401. Demuestre que una transformación univalente continuamente diferenciable $w=u+iv$ de jacobiano positivo, que transforma círculos infinitamente pequeños en elipses infinitamente pequeñas de características $p(z)$, $\theta(z)$ o $\alpha(z)$, $\beta(z)$, $\gamma(z)$ o $\mu(z)$, satisface el sistema de ecuaciones

$$u_x+\beta u_y=\alpha v_y,\quad -\beta u_x+u_y=-\alpha v_x$$

o, empleando la forma compleja, la ecuación

$$w_{\bar z}=\nu\overline{w_z},\quad \nu=-\mu=\frac{p-1}{p+1}e^{2i\theta}.$$

1402. Demuestre que la ecuación de Beltrami $w_{\bar z}=\mu(z)w_z$ es invariante respecto a las transformaciones analíticas de la función w y que la ecuación $w_{\bar z}=\nu(z)\overline{w_{\bar z}}$ es invariante respecto a las transformaciones conformas de la variable z.

1403. Sea $w=u+iv$ una transformación univalente continuamente diferenciable de jacobiano positivo que transforma elipses infinitamente pequeñas de características p, θ en elipses infinita-

mente pequeñas de características p_1, θ_1 (una transformación tal se llama transformación casiconforme con dos pares de características p, θ; p_1, θ_1 o con dos ternas de características α, β, γ; α_1, β_1, γ_1). Demuestre que la transformación $w=u+iv$ satisface el sistema de ecuaciones

$$\alpha u_x+(\beta+\beta_1)u_y=\alpha v_y,$$
$$(\beta-\beta_1)u_x+\gamma u_y=-\alpha_1 v_x,$$

que puede ser representado en la forma

$$w_{\bar z}=q_1 w_z+q_2\overline{w_{\bar z}},$$

donde

$$q_1=-\frac{p_1(p^2-1)}{(pp_1+1)(p+p_1)}e^{2i\theta},$$

$$q_2=\frac{p(p_1^2-1)}{(pp_1+1)(p+p_1)}e^{2i\theta}.$$

Sugerencia. La ecuación $|dz+\mu\, d\bar z|=\text{const}$ corresponde a la ecuación $|dw+\mu_1 d\bar w|=\text{const}$ con μ y μ_1 conocidos.

1404. Sea $\zeta=f(z)$ una transformación casiconforme de característica μ_f:

$$f_{\bar z}=\mu_f f_z$$

y sea $w=g(\zeta)$ una transformación casiconforme de característica μ_g:

$$g_{\bar\zeta}=\mu_g g_\zeta.$$

Demuestre que la superposición $F(z)=g[f(z)]=g\circ f$ es una transformación casiconforme de característica

$$\mu_F=\frac{\mu_f+\mu_g\bar f_{\bar z}/f_z}{1+\mu_g\bar\mu_f\bar f_{\bar z}/f_z}.$$

Demuestre también las relaciones

$$\mu_g=\frac{f_z}{\bar f_{\bar z}}\,\frac{\mu_F-\mu_f}{1-\bar\mu_f\mu_F},$$

$$\mu_{f^{-1}(z)}=-\mu_{f(z)}\frac{f_z}{\bar f_{\bar z}},$$

$$\mu_F=\frac{\bar f_{\bar z}}{f_z}\,\frac{\mu_g-\mu_{f^{-1}}}{1-\bar\mu_{f^{-1}}\mu_g}.$$

Observación. Si μ_F se considera conocido, la magnitud

$$\sup\ln\frac{1+|\mu_g|}{1-|\mu_g|}$$

puede tomarse por la distancia entre μ_f y μ_F. Análogamente, a través de μ_F se determina la distancia entre μ_g y $\mu_{f^{-1}}$.

1405. Sean $p_{w/z}$, $\theta_{w/z}$ las características p, θ de una transformación casiconforme $w=f(z)$. Demuestre que

$$p_{z/w}=p_{w/z}$$
$$\theta_{z/w}=\theta_{w/z}\pm\frac{\pi}{2}+\arg f_z$$

y que para la transformación conforme compuesta $w[z(t)]$ se tiene

$$p_{w/t}\leqslant p_{w/z}p_{z/t}.$$

1406. Pruebe que para las transformaciones *casiconformes*
$u=f(x)$, $v=y$ (dilatación-compresión longitudinal),
$u=x$, $v=f(y)$ (dilatación-compresión transversal),
$\rho=r$, $\theta=f(\varphi)$ (dilatación-compresión angular) la característica es

$$p=\text{máx}\left(f',\ \frac{1}{f'}\right),$$

y que para la transformación $\rho=f(r)$ $\theta=\varphi$ (dilatación-compresión radial) la característica es

$$p=\text{máx}\left(\frac{rf'}{f},\ \frac{f}{rf'}\right).$$

1407. Construya la transformación casiconforme del círculo $|z|<R$ en sí mismo que transforma el punto $z=a$ $(|a|<R)$ en el origen de coordenadas y que deja inmóviles los puntos de la circunferencia $|z|=R$. Estime la característica p.

1408. Construya la transformación casiconforme de la *semifranja oblicua* $x>0$, $x\operatorname{tg}\alpha<y<x\operatorname{tg}\alpha+h$ en la *semifranja rectangular* $u>0$, $0<v<h$ sin distensión de la base y con una distensión constante en el lado lateral. Estime la característica p.

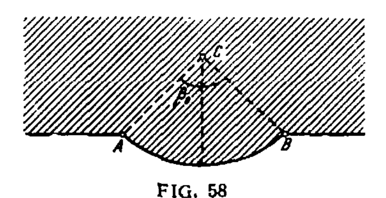


FIG. 58

1409*. Construya la transformación casiconforme del biángulo, compuesto por el semiplano y el segmento circular de ángulo central $2\beta_0$ (fig. 58), en el semiplano conservando las longitudes en la frontera. Estime la característica p.

1410. La ecuación casilineal

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=F\left(x,\ y,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

de tipo elíptico ($AC-B^2>0$) debe ser reducida a la forma canónica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=F_1\left(\xi,\ \eta,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial \xi},\ \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$$

mediante una transformación univalente $\zeta=\zeta(z)=\xi+i\eta$.

Demuestre que la transformación $\zeta(z)$ satisface el sistema de ecuaciones de Beltrami

$$\frac{A\frac{\partial \xi}{\partial x}+B\frac{\partial \xi}{\partial y}}{\sqrt{AC-B^2}}=\frac{\partial \eta}{\partial y},$$

$$\frac{B\frac{\partial \xi}{\partial x}+C\frac{\partial \xi}{\partial y}}{\sqrt{AC-B^2}}=-\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

y es una transformación casiconforme de características α, β y γ que se determinan de las relaciones

$$\frac{\gamma}{C}=\frac{\beta}{B}=\frac{\alpha}{A}=\frac{1}{\sqrt{AC-B^2}}$$

(se supone que $A>0$).

§ 2. FUNCIONES ANALÍTICAS GENERALIZADAS

Una función $w=u+iv$, que satisface la ecuación

$$w_{\bar z}+Aw+B\bar{w}=F, \qquad (1)$$

donde A, B y F son funciones de z, se llama *función analítica generalizada*.

En los problemas de este parágrafo se consideran ecuaciones y sistemas de ecuaciones que se reducen a la forma (1) y algunas propiedades de sus soluciones [1].

1411. Pruebe oue el sistema de ecuaciones de Karleman

$$\left.\begin{aligned} u_x-v_y+au+bv&=f,\\ u_y+v_x+cu+dv&=g,\end{aligned}\right\}$$

donde a, b, c, d, f y g son funciones de las variables x e y, puede ser escrito en la forma (1) $w_{\bar z}+Aw+B\bar{w}=F$.

Exprese A, B y F por medio de los coeficientes del sistema dado.

1412. Pruebe que la ecuación $w_{\bar z}-q_1(z)\bar{w}_{\bar z}+Aw+B\bar{w}=F$ puede ser reducida a la forma (1) mediante una transformación „afín"

$$w=a(z)\,\omega+b(z)\,\bar{\omega} \qquad (2)$$

Halle la forma general de la transformación (2) y analice en qué caso será no degenerada.

[1] En relación con este ciclo de problemas véase la monografía: *И. Н. Векуа*, Обобщенные аналитические функции, Физматгиз, М., 1959 (*Vekua I. N.*, Funciones analíticas generalizadas), cap. *III*.

1413. Pruebe que la ecuación

$$w_{\bar z}-q_1(z)w_z-q_2(z)\bar w_{\bar z}+Aw+B\bar w=F$$

puede ser reducida a la forma $\omega_{\bar z}-q_1^*\omega_z+A'\omega+B'\bar\omega=F'$ mediante la transformación del problema anterior. Halle la forma general de la transformación y analice en qué caso será no degenerada.

Sugerencia. Aplique la transformación considerada a la ecuación dada y a la ecuación $\overline{w_z}-\overline{q_1(z)}\,\overline{w_z}-\overline{q_2(z)}\,w_z+\bar A\,\bar w+\bar B w=\bar F$, elimine $\bar w_z$ y escoja después los coeficiente $a(z)$ y $b(z)$.

1414. Pruebe que la ecuación

$$w_{\bar z}-q_1(z)w_z-q_2(z)\bar w_{\bar z}+Aw+B\bar w=F$$

$(|q_1(z)|+|q_2(z)|<1)$ se puede reducir a la forma

$$w_{\bar\zeta}-q_2^*\bar w_{\bar\zeta}+Aw+B\bar w=F,$$

si la variable independiente z se sustituye por la variable ligada a z mediante la relación $\zeta_{\bar z}=q_1^*\zeta_z$.

Halle q_1^* y q_2^* y explique el significado geométrico de la transformación $\zeta(z)$.

1415. Demuestre que un sistema elíptico de ecuaciones diferenciales de la forma

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1 v_y&=\alpha u_x+(\beta+\beta_1)u_y+au+bv+f,\\ -\alpha_1 v_x&=(\beta-\beta_1)u_x+\gamma u_y+cu+dv+g\end{aligned}\right\}$$

(la condición de elipticidad de aqui $\alpha\gamma-\beta^2>0$; además, $\alpha>0$) puede ser reducido a la forma $w_{\bar z}-q_1(z)w_z-q_2(z)\bar w_{\bar z}+Aw+B\bar w=F$ siendo $|q_1(z)|+|q_2(z)|<1$, para $\alpha_1>0$, y $\|q_1(z)|-|q_2(z)\|>1$, para $\alpha_1<0$.

Sugerencia. Véase el problema 1403. El caso $\alpha_1<0$ se reduce al caso $\alpha_1>0$ mediante la sustitución de $w=u+iv$ por $\bar w=u-iv$.

1416. Demuestre que, siendo $w(z)$ una solución continuamente diferenciable de la ecuación $w_{\bar z}-q_2(z)\bar w_{\bar z}=0$, donde $q_2(z)$ es una función analítica de z y $q_2(z)|\neq 1$, se tiene

$$w(z)=\frac{\varphi(z)+q_2(z)\,\overline{\varphi(z)}}{1-|q_2(z)|^2},$$

donde $\varphi(z)$ es una función analítica arbitraria.

1417. Demuestre que, siendo $w(z)$ una solución dos veces continuamente diferenciable de la ecuación $w_{\bar z}-q_2(\bar z)\bar w_z=0$, donde $q_2(\bar z)$ es una función analítica de $\bar z$ y $q_2(\bar z)\neq 1$, se tiene

$$w(z)=\varphi(z)+\int q_2(\bar z)\overline{\varphi_{\bar z}}\,d\bar z,$$

donde $\varphi(z)$ es una función analítica arbitraria de z.

Sugerencia. Primero hay que demostrar que $w(z)$ es la suma de una función analítica de z y de una función analítica de $\bar z$.

§ 3. ALGUNAS RELACIONES INTEGRALES E INTEGRALES DOBLES

En los problemas de este parágrafo G es un recinto limitado por el contorno C.

1418 [1]. Empleando la fórmula de Green, demuestre que las siguientes relaciones ($f(x, y)$ y $g(x, y)$ son funciones continuamente diferenciables en $\bar{G}$):

1) $\iint_G \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\, dx\, dy = \frac{1}{2i} \int_G f\, d\zeta$;

2) $\int_C f\, d\zeta + g\, d\bar{\zeta} = 2i \iint_G \left(\frac{df}{d\bar{z}} - \frac{\partial g}{\partial z} \right) dx\, dy$;

3) $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{\pi} \iint_G \frac{\partial f(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} \frac{d\xi\, d\eta}{\zeta - z}$ $(\zeta = \xi + i\eta)$.

Sugerencia. Haga uso de que $\frac{\partial f(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} \frac{1}{\zeta - z} = \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \right)$ y aplique la fórmula del punto 1) al recinto G sin el círculo $|\zeta - z| < \rho$ $(\rho \to 0)$.

1419. Suponiendo que las funciones f y g son continuamente diferenciables en un recinto cerrado $\bar{G}$, demuestre que la expresión $f\, dz + g\, d\bar{z}$ es una diferencial total de una función si, y sólo si, $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial g}{\partial z}$.

1420. Demuestre que, siendo f y g funciones analíticas en el recinto G y continuamente diferenciables a lo largo de C, se tiene

$$\iint_G f' \bar{g}\, dx\, dy = \frac{i}{2} \int_C f \bar{g}\, d\bar{\zeta},$$

y, en particular,

$$\iint_G f' \bar{g}' dx dy = \frac{i}{2} \int_C f\, d\bar{g}.$$

1421. Demuestre que, si la función $f(z)$ transforma conformemente el recinto G en el recinto G' limitado por el contorno $C' = f(C)$, la integral

$$I = \frac{i}{2} \int_C f\, d\bar{f}$$

es igual al área S del recinto G'; en cambio, si $f(z)$ transforma conformemente el recinto G en el exterior del contorno C', se tiene $I = -S$.

---

[1] En relación con los problemas 1418—1421 véase el complemento de M. Schiffer al libro: R. Courant, Dirichlet's Principle, Conformal Mapping and Minimal Surfaces, Interscience, New York, 1950.

1422[1]. Sea G el círculo $|z| < R < 1$ y sea

$$\varphi(\zeta) = \frac{e^{2i\theta}}{\ln \frac{1}{\rho}} \qquad (\zeta = \rho e^{i\theta} = \xi + i\eta, \; z = re^{i\varphi}).$$

Halle la función

$$F(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{\varphi(\zeta)\, d\xi\, d\eta}{\zeta - z} \; (z \in G)$$

y sus derivadas parciales $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}, \frac{\partial F}{\partial \bar{z}}$ para $z \neq 0$. Pruebe que entre las derivadas indicadas solamente $\frac{dF}{d\bar{z}}$ existe y es continua en el orígen de coordenadas.

1423. Demuestre que, siendo la función $f(z)$ continuamente diferenciable, se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \lim \frac{\frac{1}{2i}\int_C f\, d\zeta}{\iint_G d\xi\, d\eta}$$

cuando el recinto G se contrae en el punto z.

Sugerencia. Haga uso de la relación del punto 1) del problema **1418**.

1424. Sea $\varphi(\zeta)$ una función continua en el recinto cerrado $\bar{G}$. Demuestre que la función

$$F(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{\varphi(\zeta)\, d\xi\, d\eta}{\zeta - z}$$

satisface en el recinto G a la ecuación $\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = \varphi(z)$, si la derivada $\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}$ se define según la fórmula del problema **1423**.

1425. Demuestre que, en las condiciones del problema **1424**, la solución general de la ecuación

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \varphi(z)$$

puede ser representada en el recinto G en la forma

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{\pi}\iint_G \frac{\varphi(\zeta)\, d\xi\, d\eta}{\zeta - z}$$

(fórmula de Pompeius).

Sugerencia. Haga uso de la relación del punto 3) del problema **1418**.

---

[1] En relación con los problemas 1422—1425 véase *И. Н. Векуа*, **Обобщенные аналитические функции, Физматгиз**, *M.*, 1959 (*Vekua I. N.*, Funciones analíticas generalizadas).

RESPUESTAS Y SOLUCIONES

Capítulo I

1. 1) $-i$; 2) $-i$; 3) $\frac{1}{5}(1+3i)$; 4) -8. 2. 1) 3, $\frac{\pi}{2}$ (aquí y en lo sucesivo se indican sólo los valores de $\arg z$); 2) 2, π; 3) $\sqrt{2}$, $\frac{\pi}{4}$; 4) $\sqrt{2}$, $-\frac{3\pi}{4}$; 5) $\sqrt{29}$, $\operatorname{arctg}\frac{5}{2}$; 6) $\sqrt{29}$, $-\operatorname{arctg}\frac{5}{2}$; 7) $\sqrt{29}$, $\pi-\operatorname{arctg}\frac{5}{2}$; 8) $\sqrt{29}$, $\operatorname{arctg}\frac{5}{2}-\pi$; 9) $|b|$, $\frac{\pi}{2}\frac{|b|}{b}=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} b$[1]; 10) $\sqrt{a^2+b^2}$, $\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$ para $a>0$, $\operatorname{argtg}\frac{b}{a}+\pi$ para $a<0$ y $b\geqslant 0$, $\operatorname{arctg}\frac{b}{a}-\pi$ para $a<0$ y $b<0$. 3. $z=\cos\varphi_k+i\operatorname{sen}\varphi_k$, donde $\varphi_k=\frac{2k\pi}{n}$, $k=0, 1, \ldots, n-1$; $z=0$. 4. 1) 1, $-\frac{1}{2}\pm\frac{i\sqrt{3}}{2}$; 2) $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$, $-i$; 3) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$; 4) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+i)$, $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-i)$, $\pm\sqrt{2}i$; 5) $\pm 1\pm i$, $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$; 6) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{\sqrt{2}+1}-i\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)$; 7) $\pm(2+i)$; 8) $\sqrt{2}\left[\cos\frac{\left(2k+\frac{3}{4}\right)\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{\left(2k+\frac{3}{4}\right)\pi}{3}\right]$ $(k=0, 1, 2)$; 9) $\sqrt[5]{5}\left[\cos\frac{(2k+1)\pi-\operatorname{arctg}\frac{3}{4}}{5}+i\operatorname{sen}\frac{(2k+1)\pi-\operatorname{arctg}\frac{3}{4}}{5}\right]$ $(k=0, 1, 2, 3, 4)$. 15. $z_k=z_1\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}\right)$ $(k=0, 1, 2, \ldots, n-1)$.

---

[1] $\operatorname{sgn} b$ es el símbolo de Kronecker:

$$\operatorname{sgn} b=1 \text{ para } b>0,$$
$$\operatorname{sgn} b=-1 \text{ para } b<0.$$

16. $z_3 = z_2 + (z_2 - z_1)\left(\cos\frac{2\pi}{n} \pm i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}\right)$. 17. $z_4 = z_1 + z_3 - z_2$.

18. La razón $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$ debe ser un número real (la condición es necesaria y suficiente). 19. La razón anarmónica $(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} : \frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_4}$ debe ser *un número real (la condición es necesaria y suficiente).*

20. *Solución.* Durante la demostración se puede aceptar (sin perder generalidad) que la recta, de la que se trata, es el eje imaginario y que todos los puntos considerados se encuentran a la derecha de la misma (en el caso contrario hay que multiplicar todos los z_k por un número de tipo $\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha$). Entonces es evidente que $\operatorname{Re} z_k > 0$ y $\operatorname{Re}\frac{1}{z_k} > 0$ para cualquier k. 23. El interior del círculo de radio R y de centro en el punto $z = z_0$; el exterior de este mismo círculo; la circunferencia de este mismo círculo. 24. La elipse de semieje mayor $\frac{5}{2}$ *y de focos en los puntos* $z = \pm 2$. 25. *El interior de la rama de la izquierda de la hipérbola de semieje real* $\frac{3}{2}$ *y de focos en los puntos* $z = \pm 2$. 26. La recta perpendicular al segmento, que une los puntos z_1 y z_2, que pasa por el centro de este segmento. 27. 1) La recta $x = C$ y el semiplano situado a la derecha de la misma; 2) el semiplano situado más abajo de la recta $y = C$. 28. La franja $-1 < y < 0$. 29. El interior del ángulo (que contiene la parte positiva del eje real) de vértice en el origen de coordenadas y de lados que forman con el eje real ángulos iguales a α y β, respectivamente; el interior de un ángulo igual de vértice en el punto z_0. 30. La parábola $y^2 = 2x + 1$. 31. El semiplano que contiene el origen de coordenadas y que está limitado por la recta $x + y = 1$. 32. La recta que pasa por los puntos z_1 y z_2 (y de la cual se ha excluido el punto z_2); la circunferencia que tiene como diámetro el segmento que une los puntos z_1 y z_2 (y de la cual se ha excluido el punto z_2). 33. El interior de las circunferencias $|z - i| = \sqrt{2}$ y $|z + i| = \sqrt{2}$, a excepción de la parte común de las mismas. 34. 1) El interior del recinto limitado por el segmento $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ del eje real y por una espira de la espiral de Arquímedes $r = \varphi$; 2) el conjunto de puntos determinado en el punto 1) y complementado por el intervalo $(0, 2\pi)$ del eje real. 35. 1) La familia de circunferencias tangentes en el origen de coordenadas al eje imaginario y el propio eje imaginario (la ecuación de la familia es: $C(x^2 + y^2) = x$); 2) la familia de circunferencias tangentes en el origen de coordenadas al eje real y el propio eje real. 36. 1) La familia de hipérbolas $x^2 - y^2 = C$; 2) la familia de hipérbolas $xy = \frac{C}{2}$. 37. Cada línea es una circunferencia que representa el lugar geométrico de los puntos para los cuales es constante la razón de sus distancias hasta los puntos z_1 y z_2 (circunferencia de Apolonio respecto a los puntos z_1 y z_2). 38. La familia de arcos de circunferencias con extremos en los puntos z_1 y z_2 (a esta familia pertenecen también dos segmentos rectilíneos con extremos en los puntos z_1 y z_2; uno de estos segmentos contiene el punto infinito). 39. 1) Cada línea es el lugar geométrico de los puntos para los cuales es constante el producto de sus distancias hasta los puntos $z = -1$ y $z = 1$ (lemniscata de focos en $z = \pm 1$). Para $\lambda > 1$ *las líneas de la familia son curvas cerradas simples, para* $\lambda < 1$ *se descomponen* en dos curvas cerradas simples que se contraen a los puntos ± 1 cuando $\lambda \to 0$. *Para* $\lambda = 1$ *tenemos la lemniscata de Bernoulli; su ecuación en las coordenadas* polares es $r^2 = 2\cos 2\varphi$. 2) Lemniscatas de focos en los puntos z_1 y z_2, donde z_1 *y* z_2 *son* las raíces de la ecuación $z^2 + az + b = 0$. Las lemniscatas se componen de una línea, si $\lambda > \sqrt{\frac{|z_2 - z_1|}{2}}$, y de dos, si $\lambda < \sqrt{\frac{|z_2 - z_1|}{2}}$. Para

$\lambda=\sqrt{\frac{|z_2-z_1|}{2}}$ tenemos la lemniscata de Bernoulli con el punto doble $\frac{z_1+z_2}{2}$.

40. 1) $|z|_{\text{máx}}=\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+4}+a)$, $|z|_{\text{mín}}=\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+4}-a)$; 2) $|z|_{\text{máx}}=$ $=\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+4|b|}+a)$, $|z|_{\text{mín}}=\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+4|b|}-a)$. 41. La espiral de Arquímedes $r=\varphi$. 42. La espiral logarítmica $r=e^{\varphi}$. 43. 1) π; 2) $\frac{2\pi}{3}$; 3) 2π; 4) π; 5) 0. 44. $\xi=\frac{x}{x^2+y^2+1}$, $\eta=\frac{y}{x^2+y^2+1}$, $\zeta=\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+1}$; $z=x+iy=$ $=\frac{\xi+i\eta}{1-\zeta}$. 45. $\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$, $\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{2}\right)$. Los cuatro puntos se encuentran sobre el ecuador y sus longitudes son iguales respectivamente a 0, π, $\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{4}$ (la longitud se mide a partir del meridiano *inicial, perteneciente al plano ξ, ζ).* 46. *La circunferencia de radio* $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\frac{\pi}{4}$ y de centro en el punto $z=0$. Al polo "sur" le corresponde el origen de coordenadas y al polo "norte", el punto infinito. 47. 1) Los semimeridianos de longitud α; 2) los paralelos de latitud $\beta=2$ acr $\operatorname{tg} r-\frac{\pi}{2}$. 48. 1) Puntos diametralmente opuestos de un mismo paralelo; 2) puntos recíprocamente simétricos respecto al meridiano inicial (es decir, que se diferencian en el signo de sus longitudes); 3) puntos recíprocamente simétricos respecto al plano del ecuador (es decir, de una misma longitud y de latitudes que se diferencian en el signo). 49. $z_1\cdot\bar{z}_2=-1$. 50. Al girar la esfera en 180° alrededor del diámetro paralelo al eje real del z—plano. 51. 1) El hemisferio del este; 2) el hemisferio del oeste; 3) el hemisferio $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$ (α es la longitud); 4) el hemisferio $\frac{\pi}{2}<|\alpha|<\pi$; 5) el hemisferio austral; 6) el hemisferio boreal. 52. La familia de circunferencias tangentes entre sí en el polo "norte" (en el polo de proyecciones); a la recta que pasa por el origen de coordenadas le corresponde una circunferencia mayor, y a la recta paralela a la primera y situada a una distancia del origen de coordenadas, le corresponde la circunferencia del plano que forma con el plano meridional un ángulo de arctg d. 53. A las rectas les corresponden circunferencias que pasan por el polo "norte". 56. $k(z, a)=\frac{|z-a|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|a|^2}}$; $k(z, \infty)=\frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}}$. 57. La circunferencia de Apolonio $\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right|=\frac{\sqrt{1+|z_1|^2}}{\sqrt{1+|z_2|^2}}$ y, en particular, la recta $|z-z_1|=$ $=|z-z_2|$, si $|z_1|=|z_2|$, y la circunferencia $|z-z_1|=\sqrt{1+|z_1|^2}$, si $z_2=\infty$.
59. 1, $e^{\pi i}$, $e^{\frac{\pi}{2}i}$, $e^{-\frac{\pi}{2}i}$, $\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$, $\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$, $\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}$, $\sqrt{2}e^{-\frac{3\pi}{4}i}$.
60. $\pm i$; $(-1)^k$. 61. e^2, 1; e^2, -3; e^3, $4-2\pi$; e^{-5}, $2\pi-4$; a, $\varphi-\pi$, si $\varphi>0$, y $\varphi+\pi$, si $\varphi\leqslant 0$; 1, $-\varphi$, si $|\varphi|<\pi$, y π, si $|\varphi|=\pi$; 2 sen $\frac{\alpha-\beta}{2}$; $\frac{\alpha+\beta+\pi}{2}$, si $\alpha+\beta\leqslant\pi$, y $\frac{\alpha+\beta-3\pi}{2}$, si $\alpha+\beta>\pi$.

62. 1) $\dfrac{\operatorname{sen}\frac{(n+1)x}{2}\cos\frac{nx}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}$; 2) $\dfrac{\operatorname{sen}\frac{(n+1)x}{2}\operatorname{sen}\frac{nx}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}$; 3) $\dfrac{\operatorname{sen} 2nx}{2\operatorname{sen} x}$;

4) $\dfrac{\operatorname{sen}^2 nx}{\operatorname{sen} x}$; 5) $\dfrac{\operatorname{sen}\frac{(n+1)x}{2}\cos\frac{nx}{2}}{\cos\frac{x}{2}}$, donde n es un número impar;

$-\dfrac{\cos\frac{(n+1)x}{2}\operatorname{sen}\frac{nx}{2}}{\cos\frac{x}{2}}$, donde n es un número par.

63. 1) $\dfrac{\operatorname{sen}\frac{n+1}{2}\beta}{\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}}\cos\left(\alpha+\frac{n\beta}{2}\right)$; 2) $\dfrac{\operatorname{sen}\frac{n+1}{2}\beta}{\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}}\operatorname{sen}\left(\alpha+\frac{n\beta}{2}\right)$.

67. 1) $\operatorname{sen} z=\operatorname{sen}(x+iy)=\operatorname{sen} x \operatorname{ch} y+i\cos x \operatorname{sh} y$, $|\operatorname{sen} z|=\sqrt{\operatorname{sh}^2 y+\operatorname{sen}^2 x}$; 2) $\cos z=\cos x\operatorname{ch} y-i\operatorname{sen} x\operatorname{sh} y$, $|\cos z|=\sqrt{\operatorname{sh}^2 y+\cos^2 x}$; 3) $\operatorname{tg} z=\dfrac{\operatorname{sen} 2x+i\operatorname{sh} 2y}{\cos 2x+\operatorname{ch} 2y}$, $|\operatorname{tg} z|=\dfrac{\sqrt{\operatorname{sen}^2 2x+\operatorname{sh}^2 2y}}{\cos 2x+\operatorname{ch} 2y}$; 4) $\operatorname{sh} z=\operatorname{sh} x\cos y+ + i\operatorname{ch} x\operatorname{sen} y$, $|\operatorname{sh} z|=\sqrt{\operatorname{sh}^2 x+\operatorname{sen}^2 y}$; 5) $\operatorname{ch} z=\operatorname{ch} x\cos y+i\operatorname{sh} x\operatorname{sen} y$, $|\operatorname{ch} z|=\sqrt{\operatorname{sh}^2 x+\cos^2 y}$; 6) $\operatorname{th} z=\dfrac{\operatorname{sh} 2x+i\operatorname{sen} 2y}{\operatorname{ch} 2x+\cos 2y}$, $|\operatorname{th} z|=\dfrac{\sqrt{\operatorname{sh}^2 2x+\operatorname{sen}^2 2y}}{\operatorname{ch} 2x+\cos 2y}$.

68. 1) $\cos 2\operatorname{ch} 1-i\operatorname{sen} 2\operatorname{sh} 1$; 2) $i\operatorname{sh} 2$; 3) $2\dfrac{\operatorname{sen} 4-i\operatorname{sh} 2}{(\cos^2 2+\operatorname{sh}^2 1)}$; 4) $\dfrac{8+15i}{17}$; 5) $\dfrac{\operatorname{sh} 4-i\operatorname{sen} 2}{\operatorname{ch} 4-\cos 2}$, 6) $\dfrac{40+9i}{41}$. 69. $\operatorname{Im} e^z=0$, si $\operatorname{Im} z=k\pi$; $\operatorname{Re} e^z=0$, si $\operatorname{Im} z= =(2k+1)\frac{\pi}{2}$; $\operatorname{Im}\cos z=0$, si $\operatorname{Re} z=k\pi$ ó $\operatorname{Im} z=0$; $\operatorname{Re}\cos z=0$, si $\operatorname{Re} z= =(2k+1)\frac{\pi}{2}$; $\operatorname{Im}\operatorname{sen} z=0$, si $\operatorname{Re} z=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ ó $\operatorname{Im} z=0$; $\operatorname{Re}\operatorname{sen} z=0$, si $\operatorname{Re} z=k\pi$; $\operatorname{Im}\operatorname{tg} z=0$, si $\operatorname{Im} z=0$; $\operatorname{Re}\operatorname{tg} z=0$, si $\operatorname{Re} z=\frac{k\pi}{2}$; $\operatorname{Im}\operatorname{ch} z=0$, si $\operatorname{Im} z=k\pi$ ó $\operatorname{Re} z=0$; $\operatorname{Re}\operatorname{ch} z=0$, si $\operatorname{Im} z=(2k+1)\frac{\pi}{2}$; $\operatorname{Im}\operatorname{cth} z=0$, si $\operatorname{Im} z= =\frac{k\pi}{2}$; $\operatorname{Re}\operatorname{cth} z=0$, si $\operatorname{Re} z=0$. En todas las fórmulas k es un número entero ($k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). 70. 1) $\operatorname{Re} z=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$; 2) $\operatorname{Im} z=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$.

71. 1) $\ln 4+2k\pi i$, $(2k+1)\pi i$, πi; 2) $\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi i$, $\frac{\pi i}{2}$; 3) $\left(2k\pm\frac{1}{4}\right)\pi i$; 4) $\frac{1}{2}\ln 13+\left(2k\pi-\operatorname{arctg}\frac{3}{2}\right)i$, $\frac{1}{2}\ln 13+\left[(2k+1)\pi-\operatorname{arctg}\frac{3}{2}\right]i$.

72. El conjunto de valores de $2\operatorname{Ln} z$ constituye sólo una parte del conjunto de valores de $\operatorname{Ln}(z^2)$ (véase [1, cap. II, § 5. n° 4]). 73. 1) 4π; 2) -2π; 3) 0; 4) 4π. 74. 1) $\cos(2k\sqrt{2}\pi)+i\operatorname{sen}(2k\sqrt{2}\pi)$; 2) $2^{\sqrt{2}}[\cos(2k+ +1)\pi\sqrt{2}+i\operatorname{sen}(2k+1)\pi\sqrt{2}]$; 3) $e^{2k\pi}(\cos\ln 2+i\operatorname{sen}\ln 2)$; 4) $e^{2k\pi}$;

5) $e^{\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi}$; 6) $\frac{1-i}{\sqrt{2}} e^{\left(2k+\frac{1}{4}\right)\pi}$; 7) $5e^{\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+2k\pi}\left[\cos\left(\ln 5-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)+\right.$ $\left.+i\operatorname{sen}\left(\ln 5-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)\right]$; 8) $-5e^{\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+(2k+1)\pi}\left[\cos\left(\ln 5-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)+\right.$ $\left.+i\operatorname{sen}\left(\ln 5-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)\right]$. En todas las fórmulas k es un número entero ($k=0$, ± 1, ± 2, ...).

76. Los conjuntos de valores de a^{2z} y de $(a^z)^2$ coinciden entre sí, pero no coinciden, en general, con el conjunto de valores de $(a^2)^z$; el caso general, en que el exponente 2 es sustituido por un exponente complejo β cualquiera, se analiza en [1, cap. II, § 5, nº 5]. 80 1) Im Arccos $z=$ Im Arcsen $z=0$, si z es un número real y $|z|\leqslant 1$; Im Arctg $z=0$, si z es un número real; 2) Re Arsh $z=0$, si z es un número imaginario puro y $|z|\leqslant 1$. 81. 1) $\frac{\pi}{6}+2k\pi$, $\frac{5\pi}{6}+2k\pi$; 2) $2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$; 3) $2k\pi\pm i\ln(2+\sqrt{3})$; 4) $2k\pi-i\ln(\sqrt{2}-1)$, $(2k+1)\pi-i\ln(\sqrt{2}+1)$; 5) $\frac{1}{2}\left[\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+(2k+1)\pi\right]+\frac{i}{4}\ln 5$; 6) $\ln(\sqrt{5}\pm 2)+\left(2k\pm\frac{1}{2}\right)\pi i$; 7) $\frac{1}{4}\ln 5+\left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2+\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi\right]i$. En todas las fórmulas k es un número entero ($k=0$, ± 1, ± 2, ...).

82. 1) $z=\frac{\pi}{4}+2k\pi-i\ln(\sqrt{2}\pm 1)$; 2) $z=\frac{3\pi}{4}+2k\pi-i\ln\frac{3\pm\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$; 3) $z=\frac{\pi}{4}+2k\pi-i\ln\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$ y $z=\frac{3\pi}{4}+2k\pi-i\ln\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$; 4) $z=2k\pi i$; 5) $z=-\ln 2+(2k+1)\pi i$; 6) $z=\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi i$ y $z=-\ln 3+\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi i$. En todas las fórmulas k es un número entero. 83. 1) $z=k\pi(1\pm i)$; 2) $z=k\pi(1+i)$ y $z=\frac{(2k+1)\pi}{1+i}$; 3) $z=\frac{(4k+1)\pi}{2(1+2i)}$ y $z=\frac{(4k-1)\pi}{2(1-2i)}$. En todas las fórmulas k es un número entero. 95. Converge absolutamente. 96. Converge absolutamente. 97. Diverge. 98. Converge no absolutamente. 99. Converge no absolutamente para $\varphi\neq 2k\pi$ ($k=0$, ± 1, ± 2, ...) y diverge para $\varphi=2k\pi$. 100. Converge absolutamente. 101. Diverge. 102. Converge absolutamente. 103. Diverge. 104. Converge absolutamente. 105. 1) $z=0$ y $z=2$; 2) $z=0$, $z=\frac{1}{m}$, $z=\frac{i}{n}$ (m y n son números enteros cualesquiera); 3) todos los puntos del plano; 4) todos los puntos del círculo $|z|\leqslant 1$. 107. 2) Cuando $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$ es igual a 0 ó al ∞. 109. El segmento rectilíneo $x=1$, $-2\leqslant y\leqslant 0$. 110. La parábola $y=x^2$. 111. La rama de la derecha de la parábola $y=x^2$ recorrida dos veces. 112. La semicircunferencia de la izquierda de radio a y de centro en el punto $z=0$. 113. La rama de la hipérbola $y=\frac{1}{x}$ perteneciente al tercer cuadrante. 114. 1) La semicircunferencia superior de radio 1 y de centro en el punto $z=0$; 2) la cuarta parte de la circunferencia de radio 1 y de centro en el punto $z=0$, perteneciente al primer cuadrante. 115. 1) La cicloide $x=a(t-\operatorname{sen} t)$, $y=a(1-\cos t)$; 2) el primer (contando desde el origen de coordenadas) arco de la cicloide $x=at-b\operatorname{sen} t$, $y=a-b\cos t$ alargada ($a<b$), acortada ($a>b$) o corriente ($a=b$). 116. 1) Las imágenes de las rectas $x=C$ son para $C\neq 0$ las parábolas $u=C^2-\frac{v^2}{4C^2}$ y para $C=0$ el semieje $v=0$, $u\leqslant 0$; las imágenes de las rectas $y=C$

son para $C \neq 0$ las parábolas $u = \frac{v^2}{4C^2} - C^2$ y para $C = 0$ el semieje $v = 0$, $u \geq 0$; la imagen de la recta $y = x$ es el semieje $u = 0$, $v \geq 0$; las imágenes de las circunferencias $|z| = R$ son las circunferencias $|w| = R^2$; las imágenes de los rayos $\arg z = \alpha$ son los rayos $\arg w = 2\alpha$; biunivocamente se transforman las rectas $x = C$, $y = C$ con $C \neq 0$ y los rayos $\arg z = \alpha$; 2) las preimágenes de las rectas $u = C$ son las hipérbolas $x^2 - y^2 = C$ (un par de rectas para $C = 0$), las preimágenes de las rectas $v = C$ son las hipérbolas $xy = \frac{C}{2}$ (un par de rectas para $C = 0$).

117. 1) Las imágenes de las rectas $x = C$ son las circunferencias $u^2 + v^2 - \frac{u}{C} = 0$ y el eje $u = 0$ para $C = 0$; las imágenes de las rectas $y = C$ son las circunferencias $u^2 + v^2 + \frac{v}{C} = 0$ y el eje $v = 0$ para $C = 0$; las imágenes de las circunferencias $|z| = R$ son las circunferencias $|w| = \frac{1}{R}$; las imágenes de los rayos $\arg z = \alpha$ son los rayos $\arg w = -\alpha$; la imagen de la circunferencia $|z - 1| = 1$ es la recta $u = \frac{1}{2}$; 2) las preimágenes de las rectas $u = C$ son las circunferencias $x^2 + y^2 - \frac{x}{C} = 0$ y el eje $x = 0$ para $C = 0$; las preimágenes de las rectas $v = C$ son las circunferencias $x^2 + y^2 + \frac{y}{C} = 0$ y el eje $y = 0$ para $C = 0$. **118.** La función $w = z + \frac{1}{z}$ transforma las circunferencias $|z| = R \neq 1$ en las elipses $\frac{u^2}{\left(R + \frac{1}{R}\right)^2} + \frac{v^2}{\left(R - \frac{1}{R}\right)^2} = 1$ y la circunferencia $|z| = 1$ en el segmento $v = 0$, $-2 \leq u \leq 2$; la función $w = z - \frac{1}{z}$ transforma las circunferencias $|z| = R \neq 1$ en las elipses $\frac{u^2}{\left(R - \frac{1}{R}\right)^2} + \frac{v^2}{\left(R + \frac{1}{R}\right)^2} = 1$ y la circunferencia $|z| = 1$ en el segmento $u = 0$, $-2 \leq v \leq 2$. **119.** La preimagen de la familia $u = C$ es la familia $x(x^2 + y^2 + 1) = C(x^2 + y^2)$; la preimagen de la familia $v = C$ es la familia $y(x^2 + y^2 - 1) = C(x^2 + y^2)$ (fig. 59). **120.** En el rayo que va a lo largo de la parte negativa del eje real desde el punto $w = -\frac{1}{4}$ hacia el punto $w = \infty$. **121.** 1) Las circunferencias $\rho = e^C$, los rayos $\theta = C$, la espiral $\rho = e^\theta$; 2) las curvas $y = e^x + 2k\pi$. **122.** 1) La familia de las rectas $x = C$ se transforma en la familia $v^2 = -4a^2\left(u - a^2 + \frac{1}{4}\right)$ (de parábolas de foco en el punto $w = -\frac{1}{4}$, $a = C + \frac{1}{2}$), que contiene también el rayo que va a lo largo de la parte negativa del eje real ($a = 0$) desde el punto $w = -\frac{1}{4}$; la familia $y = C$ se transforma en la familia de parábolas confocales $v^2 = 4C^2\left(u + C^2 + \frac{1}{4}\right)$ que contiene también el rayo que va del punto $w = -\frac{1}{4}$ a lo largo del eje real en la dirección positiva; 2) la familia $x = C$ se transforma en la familia de circunferencias de Apolonio respecto a los puntos $w = -1$ y $w = 1$ (incluyendo el eje imaginario); la ecuación de la familia de circunferencias de Apolonio es $(u - a)^2 + v^2 = a^2 - 1$; $|a| > 1$ ($a = \operatorname{cth} 2C$); la familia $y = C$ se transforma en un haz de arcos circulares con extremos en los puntos $w = -1$ y $w = 1$, que incluye también las partes correspondientes del eje

real; la ecuación del haz de las circunferencias es $u^2+(v+b)^2=1+b^2$ ($b=\operatorname{ctg} 2C$); 3) la familia $x=C$ se transforma en la familia de espirales $\rho=e^{C^2-\frac{\theta^2}{4C^2}}$ y al eje $x=0$ le corresponde el segmento $\theta=0$, $0<\rho\leqslant 1$; la familia $y=C$ se transforma en la familia de espirales $\rho=e^{\frac{\theta^2}{4C^2}-C^2}$ y al eje $y=0$ le corresponde el rayo $\theta=0$, $1\leqslant\rho<\infty$. **123.** A las rectas $y=C$ les corresponden las curvas $u=x+e^x\cos C$, $v=C+e^x \operatorname{sen} C$ y a los segmentos de las rectas $x=C$ les corresponden los arcos de las curvas $u=C+e^C\cos y$, $v=y+e^C\operatorname{sen} y$. **124.** 1) A la familia $|w|=R$ le corresponden las circunferencias $r=\frac{\cos\varphi}{\ln R}$ $(R\neq 1)$ y el eje imaginario $(R=1)$; a cada rayo $\arg w=\alpha$ le corresponde la familia de circunferencias $r=\frac{\operatorname{sen}\varphi}{2k\pi-\alpha}$;

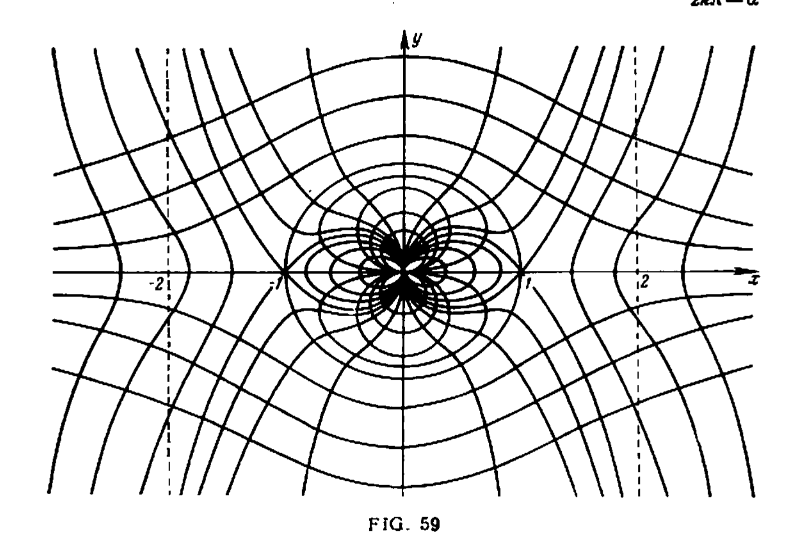


FIG. 59

para $\alpha=0$ esta familia contiene el eje real (si $k=0$); 2) las hipérbolas $x^2-y^2=\ln R$ y $2xy=\alpha+2k\pi$. **126.** Solamente $f(z)=\frac{z\operatorname{Re} z}{|z|}$ $(f(0)=0)$. **127.** 1) y 2) Son continuas pero no uniformemente. **128.** 2) No; 3) Sí. **132.** 1) $c=1$, $b=-a$; $f(z)=(1-ai)z^2$; 2) $a=b=-1$; $f(z)=e^{iz}$. **133.** La función es analítica para $0<\arg z<\frac{\pi}{4}$, $\pi<\arg z<\frac{5\pi}{4}$ $(f(z)=z^2)$ y para $\frac{\pi}{2}<\arg z<\frac{3\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{2}<\arg z<\frac{7\pi}{4}$ $(f(z)=-z^2)$. **135.** $r\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial v}{\partial\varphi}$, $\frac{\partial u}{\partial\varphi}=-r\frac{\partial v}{\partial r}$. **138.** 0. **155.** 1) No, si $u\neq\text{const}$; 2) $f(u)=au+b$. **156.** $|f(z)|$ no es una función armónica, $\arg f(z)$ y $\ln|f(z)|$ son armónicas. **157.** $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$; $u=C_1\ln r+C_2$. **158.** $p_1=x$, $q_1=y$; $p_2=x^2-y^2$, $q_2=2xy$;

$p_3=x^3-3xy^2$, $q_3=3x^2y-y^3$; $p_4=x^4-6x^2y^2+y^4$, $q_4=4xy^3-4xy^3$; $p_n=r^n\cos n\varphi$, $q_n=r^n \operatorname{sen} n\varphi$. **159.** $v=(x, y)=2xy+y+C$. **160.** $v(x, y)=-\frac{y}{x^2+y^2}+C$. **161.** a) $v(x, y)=\arg z+C$; b) $v(x, y)=\arg z+2m\pi+C$. **162.** a) $v(x, y)=\arg z-\arg(z-1)+2m\pi+C$; b) $v(x, y)=\arg z-\arg(z-1)+C$; c) $v(x, y)=\arg z-\arg(z-1)+2m\pi+C$. **163.** a) $v(x, y)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k \arg(z-z_k)+2\pi\sum_{k=1}^{n} m_k\alpha_k+C$; b) $v(x, y)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k \arg(z-z_k)+2\pi m\sum_{k=1}^{n}\alpha_k+C$ (¡si $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k=0$, la función $v(x, y)$ es uniforme en el recinto considerado!).
164. 1) Existe; 2) existe; 3) no existe. **165.** $f(z)=z^2+(5-i)z-\frac{i}{z}+Ci$. **166.** $f(z)=ze^z+2i\cos z+z^3-iz+Ci$. **167.** $f(z)=\frac{1}{2z}+iz^2+3i+C$. **168.** $f(z)=2i\ln z-(2-i)z+C$. En todas las fórmulas C es una constante real arbitraria.
169. $u=C_1x+C_2$. **170.** $u=C_1(ax+by)+C_2$. **171.** $u=C_1\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+C_2$. **172.** $u=C_1xy+C_2$. **173.** $u=C_1\ln(x^2+y^2)+C_2$. **174.** $u=\frac{C_1x}{x^2+y^2}+C_2$. **175.** $u=C_1\sqrt{x+\sqrt{x^2+y^2}}+C_2$ **176.** No existe. **177.** $f(z)=e^{i\alpha}z^2e^z$. **178.** $f(z)=e^{i\alpha}e^{z^2}$. **179.** $f(z)=Ae^{\frac{z^2}{2}}$. **180.** $f(z)=Aze^z$ (α es una constante real arbitraria, A es una constante positiva arbitraria). **182.** $az+\lambda$, $iaz+\lambda$, λe^{az}, λe^{iaz}. **183.** $iaz+\lambda$, $az+\lambda$, λe^{iaz}, λe^{az}. **184.** $ai\ln z+\lambda$, $a\ln z+\lambda$, $\lambda e^{ai\ln z}$, $\lambda e^{a\ln z}$. **185.** $a\ln z+\lambda$, $ai\ln z+\lambda$, $\lambda e^{a\ln z}$, $\lambda e^{ai\ln z}$. **186.** $\frac{a}{z}+\lambda$, $\frac{ai}{z}+\lambda$, $\lambda e^{\frac{a}{z}}$, $\lambda e^{\frac{ai}{z}}$ (a es una constante real arbitraria y λ es una constante compleja arbitraria). **187.** Para $w=z^2$; 1) $\vartheta=0$, $k=2$; 2) $\vartheta=\pi$, $k=\frac{1}{2}$; 3) $\vartheta=\frac{\pi}{4}$, $k=2\sqrt{2}$; 4) $\vartheta=\pi-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$, $k=10$. Para $w=z^3$, 1) $\vartheta=0$, $k=3$; 2) $\vartheta=0$, $k=\frac{3}{16}$; 3) $\vartheta=\frac{\pi}{2}$, $k=6$; 4) $\vartheta=-2\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$, $k=75$.
188. 1) Compresión para $|z|<\frac{1}{2}$ y dilatación para $|z|>\frac{1}{2}$; 2) compresión para $|z+1|<\frac{1}{2}$ y dilatación para $|z+1|>\frac{1}{2}$, 3) compresión para $|z|>1$ y dilatación para $|z|<1$; 4) compresión para Re $z<0$ y dilatación para Re $z>0$; 5) compresión para $|z-1|>1$ y dilatación para $|z-1|<1$. **189.** $S=\iint_G |f'(z)|^2\,dx\,dy$, $L=\int_l |f'(z)|\,ds$. **190.** $\sqrt{2}(e^{2\pi}-1)$. **191.** $2e^2(e^2-1)$.
192. El recinto D es el anillo $e\leqslant|w|\leqslant e^2$. La fórmula del problema 189 no se puede aplicar porque la transformación no es biunívoca.

193. $w=(1+i)(1-z)$. 194. $w=(2+i)z+1-3i$. 195. 1) $z_0=-1+3i$, $\vartheta=0$, $k=2$, $w+1-3i=2(z+1-3i)$; 2) $z_0=2+2i$; $\vartheta=\frac{\pi}{2}$, $k=1$. $w-2-2i=i(z-2-2i)$; 3) no existe punto inmóvil finito; 4) si $a=1$, no existe punto inmóvil finito; si $a\neq 1$, se tiene $z_0=\frac{w_1-az_1}{1-a}$, $\vartheta=\arg a$, $k=|a|$, $w-\frac{w_1-az_1}{1-a}=a\left(z-\frac{w_1-az_1}{1-a}\right)$; 5) si $a=1$, no existe punto inmóvil finito; si $a\neq 1$, se tiene $z_0=\frac{b}{1-a}$, $\vartheta=\arg a$, $k=|a|$, $w-\frac{b}{1-a}=a\left(z-\frac{b}{1-a}\right)$. 196. 1) $w=az+b$; 2) $w=-az+b$; 3) $w=-i(az+b)$; 4) $w=az+bi$. En todas las fórmulas a y b son números reales y $a>0$. 197. 1) $w=z+bi$ o $w=-z+1+bi$; 2) $w=z+b$ o $w=-z-i+b$; 3) $w=z+b(1+i)$ o $w=-z+1+b(1+i)$. En todas las fórmulas b es un número real. Pueden corresponder uno a otro los puntos que pertenecen o bien a una recta paralela a las fronteras de la franja o bien a rectas paralelas simétricas, respecto a la línea media de la franja. La transformación no queda determinada unívocamente, si los puntos correspondientes pertenecen a la línea media. 198. 1) $w=\frac{z-a}{h}$; 2) $w=\frac{-z+a+h}{h}+i$; 3) $w=\frac{\sqrt{1+k^2}}{b}\times\times e^{-i\left(\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}k\right)}z$; 4) $w=\frac{\sqrt{1+k^2}}{b_2-b_1}e^{-i\left(\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}k\right)}(z-ib_1)$. 199. $w=e^{i\alpha}Rz+w_0$. 200. 1) La familia de las rectas $u=\frac{1}{a}$ paralelas al eje imaginario (que no comprende el propio eje imaginario); 2) la familia de las rectas $v=-\frac{1}{b}$ paralelas al eje real (que no comprende el propio eje real); 3) la familia de circunferencias $b(u^2+v^2)+u+v=0$ tangentes en el origen de coordenadas a la recta $v=-u$ (que comprende esta recta); 4) el haz de rectas $v=-ku$; 5) el haz de las circunferencias que pasan por el origen de coordenadas y por el punto $w_0=\frac{1}{z_0}$ (a este haz pertenece también la recta que pasa por los puntos $w=0$ y $w=w_0$); 6) la cisoide $u^2=-\frac{v^2}{v+1}$. 201. 1) En la familia de circunferencias tangentes en el punto $w=h$ a las rectas paralelas respectivamente al eje real y al eje imaginario (incluyendo estas rectas); las ecuaciones de estas familias son

$$(C-x_0)[(u-h_1)^2+(v-h_2)^2]-(u-h_1)=0;$$
$$(C-y_0)[(u-h_1)^2+(v-h_2)^2]+(v-h_2)=0,$$

donde $z_0=x_0+iy_0$, $h=h_1+ih_2$; 2) en la familia de circunferencias de centro en el punto $w=h$ $\left(|w-h|=\frac{1}{R}\right)$ y en la familia de rayos que parten del punto $w=h$ $(\arg(w-h)=-\alpha)$. 202. 1) La ecuación de la familia de circunferencias de Apolonio respecto a los puntos z_1 y z_2 es $\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right|=\lambda$. Los extremos A y B del diámetro perteneciente a la recta pasan por los puntos z_1 y z_2 (fig. 60) y dividen el segmento z_1z_2 en la razón λ de manera interna y externa. Empleando las denotaciones indicadas en la figura (C es el centro de la circunferencia de diámetro AB) y tomando $|z_1-z_2|=d$, se obtienen para $\lambda<1$ las reacciones siguientes: $\lambda=\cos\alpha=\frac{r_1}{R}=\frac{R}{r^2}$, $R=\frac{\lambda d}{1-\lambda^2}$, $r_1=\frac{\lambda^2 d}{1-\lambda^2}$, $r_2=\frac{d}{1-\lambda^2}$; 2) los ar-

cos de las circunferencias que pasan por los puntos z_1 y z_2: $\arg\frac{z-z_1}{z-z_2}=\theta$ Los arcos correspondientes a los valores $\theta=\alpha$ y $\theta=\pi-\alpha$ complementan el uno al otro formando una circunferencia completa; 3) a la red polar le corresponde (fig. 61) la red compuesta por las circunferencias de Apolonio $\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right|=R$ y por los arcos $\arg\frac{z-z_1}{z-z_2}=\theta$ ortogonales a las mismas (si $\theta>0$, el arco se sitúa a la derecha de la birección $\overrightarrow{z_1z_2}$; si $\theta<0$, a la izquierda); 4) al semicírculo superior le corresponde el ángulo recto indicado en la figura. **203.** En el semicírculo $|w|<1$, $\operatorname{Im} w<0$. **204.** En el recinto que contiene el punto $w=0$ y está limitado por los arcos de las circunferencias $|w|=1$ y $\left|w+\frac{5i}{4}\right|=\frac{3}{4}$. **205.** En el recinto

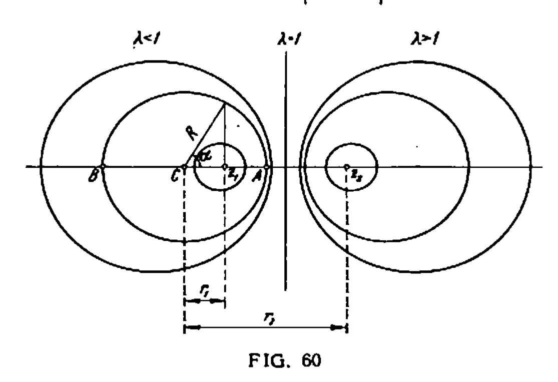


FIG. 60

que se obtiene al excluir del semiplano inferior ($\operatorname{Im} w<0$) la parte del círculo $\left|w-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\right|<\frac{\sqrt{2}}{2}$ perteneciente a este semiplano. **206.** 1) En el recinto limitado por la recta $\operatorname{Re} w=1$ y por la circunferencia $\left|w-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$ tangente a ella; 2) en el recinto limitado por las circunferencias $\left|w-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$ y $\left|w-\frac{3}{4}\right|=\frac{1}{4}$ tangentes entre sí. **207.** En el recinto doblemente conexo cuya frontera consta de la recta $\operatorname{Re} w=\frac{1}{2}$ y de la circunferencia $\left|w-\frac{4}{3}\right|=\frac{2}{3}$. **208.** 1) $w=-\frac{d}{z}+1+hi$ o $w=\frac{d}{z}+hi$; 2) $w=\frac{d_1}{d_2-d_1}\left(\frac{d_2}{z}-1\right)+hi$ o $w=\frac{d_2}{d_1-d_2}\left(\frac{d_1}{z}-1\right)+1+hi$; 3) $w=\frac{d_1(z-d_2)}{z(d_1+d_2)}$.

209. 1) $w=-\frac{2i(z+1)}{4z-1-5i}$; 2) $w=\frac{(1+2i)z+6-3i}{5(z-i)}$. **210.** 1) $w=\frac{(1+i)z+1+3i}{(1+i)z+3+i}$; 2) $w=\frac{iz+2+i}{z+1}$; 3) $w=\frac{1-i}{2}(z+1)$. **211.** 1) $w=\frac{(-1+3i)z+1-i}{(1+i)z-1+i}$; 2) $w=\frac{z(1-4i)-2(1-i)}{2z(1-i)-(4-i)}$; 3) $w=\frac{z(3-i)-(1+i)}{(1+i)(1-z)}$.

212. $w=\frac{z-i}{iz-1}$; el semiplano superior se transforma en el círculo unidad. 213. 1) $w=\frac{az+b}{cz+d}$, donde a, b, c, d son números reales y $ad-bc>0$; 2) $w=\frac{az+b}{cz+d}$, donde a, b, c, d son números reales y $ad-bc<0$; 3) $w=i\frac{az+b}{cz+d}$ donde a, b, c, d son números reales y $ad-bc<0$. 214. 1) $w=\frac{2}{2-z}$; 2) $w=-2\left(\frac{2z+1}{z-2}\right)$. 215. $w=\frac{R-z}{R+z}$; la imagen del semicírculo superior es el ángulo $u>0$, $v<0$. 216. 1) $\frac{2+i}{5}$; 2) $\frac{9}{2}+i$. 217. 1) $|z|=2$; 2) la recta

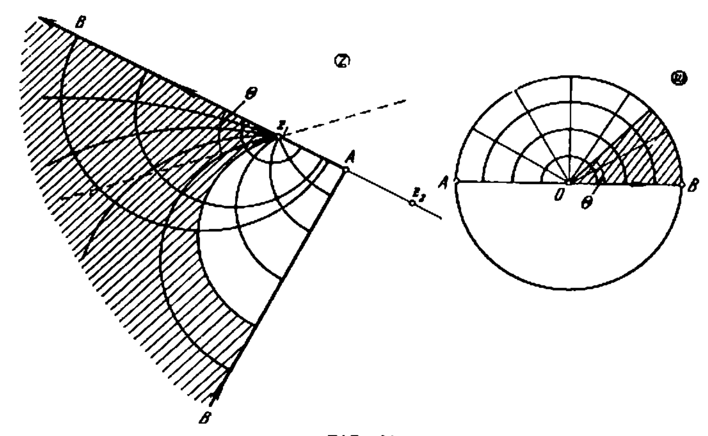


FIG. 61

$x=\frac{1}{2}$; 3) $\left|z-\frac{i}{4}\right|=\frac{1}{4}$; 4) $xx_0+yy_0=\frac{1}{2}$; 5) $|z-z_0|=\sqrt{|z_0|^2-1}$ (es decir, esta circunferencia es simétrica a sí misma respecto a la circunferencia unidad); 6) $(x^2+y^2)^2-(x^2-y^2)=0$ (lemniscata); 7) un triángulo curvilíneo de vértices en los puntos $\frac{1}{\bar{z}_1}$, $\frac{1}{\bar{z}_2}$, $\frac{1}{\bar{z}_3}$, cuyos lados están formados por arcos de las circunferencias que pasan por un par de vértices y por el punto $z=0$ (uno de los arcos puede resultar un segmento rectilíneo). 219. 1) $\theta(x)=\alpha+2\arg(x-\beta)$; 2) $w'\beta=\frac{e^{\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)i}}{2b}$; 3) si $b\geqslant 2$, todo el semiplano se contrae; si $b<2$, se dilata el recinto que se halle dentro del círculo $|z-\bar{\beta}|<\sqrt{2b}$. (La circunferencia $|z-\bar{\beta}|=\sqrt{2b}$ se llama isométrica.) 220. 1) $w=\frac{z-i}{z+i}$; 2) $w=i\frac{z-2i}{z+2i}$; 3) $w=e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}\frac{z-(a+bi)}{z-(a-bi)}$. 221. $w=Ri\frac{z-i}{z+i}+w_0$. 222. $w=-\frac{z-2i}{z+2i}$.

223. $w=-4\frac{zi+2}{z-2-4i}$. 224. $w=ke^{\frac{1}{2}\left(\pi+\arg\frac{z_2}{z_1}\right)i}\frac{z-z_1}{z-z_2}$, donde $k>0$. A los rayos del semiplano $\operatorname{Re} w>0$ que salen del punto $w=0$ les corresponden en el z-plano los arcos de las circunferencias que se hallan dentro del círculo $|z|<1$ y que pasan por los puntos z_1 y z_2; a las circunferencias de centro en el punto $w=0$, pertenecientes al semiplano $\operatorname{Re} w>0$ les corresponden los arcos de las circunferencias de Apolonio (respecto a los puntos z_1 y z_2) que se hallan dentro del círculo $|z|<1$. 225. $w_0=\frac{\bar{z}_2-z_1}{\bar{z}_2-z_2}$, $R=\frac{|z_2-z_1|}{2|\operatorname{Im} z_2|}$.

226. $\frac{w-b}{w-\bar{b}}=e^{i\alpha}\frac{z-a}{z-\bar{a}}$. 227. $\frac{w-\bar{a}}{w-a}=i\frac{z-a}{z-\bar{a}}$. 228. 1) $\theta\varphi=\alpha-\varphi+$ $+2\arg(e^{i\varphi}-a)=\alpha-\varphi+2\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{sen}\varphi-\lambda\operatorname{sen}\vartheta}{\cos\varphi-\lambda\cos\vartheta}$, donde $a=\lambda e^{i\vartheta}$. 2) $w'(0)=$ $=(1-|a|^2)e^{i\alpha}$, $w'(a)=\frac{e^{i\alpha}}{1-|a|^2}$. 3) Si $a\neq 0$, se dilata el recinto perteneciente al interior del círculo $\left|z-\frac{1}{\bar{a}}\right|<\sqrt{\frac{1}{|a|^2}-1}$ y se contrae el recinto que se encuentra fuera de este círculo. (La circunferencia $\left|z-\frac{1}{\bar{a}}\right|=\sqrt{\frac{1}{|a|^2}-1}$ es isométrica.) Si $a=0$, se tiene $|w'(z)|\equiv 1$. 4) máx $\left|\frac{dw}{dz}\right|=\frac{1+|a|}{1-|a|}$, min $\left|\frac{dw}{dz}\right|=$ $=\frac{1-|a|}{1+|a|}$. 229. 1) $w=\frac{2z-1}{2-z}$; 2) $w=\frac{2iz+1}{2+iz}$; 3) $w=-iz$; 4) $\frac{w-a}{1-\bar{a}w}=$ $=e^{i\alpha}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$. 230. $R_2\frac{w-b}{R_2^2-\bar{b}w}=e^{i\alpha}R_1\frac{z-a}{R_1^2-\bar{a}z}$. 231. $w=\frac{1-z}{z+2}$. 232. $w=$ $=2\frac{z-2+i}{iz+2-2i}$. 233. 1) $w=R^2e^{i\alpha}\frac{z-a}{R^2-\bar{a}z}$; 2) $\frac{w-b}{R^2-\bar{b}w}=e^{i\alpha}\frac{z-a}{R^2-\bar{a}z}$; 3) $w=$ $=R^2\frac{z-a}{R^2-az}$, donde a es un número real y $|a|<R$. 234. $\frac{w-a}{1-aw}=e^{i\varphi}\frac{z-z_1}{1-\bar{z}_1z}$, donde $\varphi=\pi-\arg\frac{z_2-z_1}{1-\bar{z}_1z_2}$, $a=\frac{|z_2-z_1|}{|1-\bar{z}_1z_2|+\sqrt{(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)}}$.

235. $w=\pm\frac{az-1+\sqrt{1-a^2}}{(1-\sqrt{1-a^2})z-a}$, $p=2\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}$. 238. 1) $w=z$; 2) $w=$ $=\frac{z+2-\sqrt{3}}{1+(2-\sqrt{3})z}$; 3) $w=i\frac{z-2+\sqrt{3}}{1-(2-\sqrt{3})z}$. 241. Las circunferencias que pasan por el punto z_0 y que tienen en él una tangente determinada por el vector $\vec{h}$.

242. $w=\frac{(R-ki)z-R^2}{z-(R+ki)}$, donde k es un número real, $k\neq 0$ (para $k=\infty$ hay que tomar $w=z$). 247. Si $|a|<\operatorname{sen}\frac{\lambda}{2}$, la transformación es elíptica. Si se toma $|a|=\operatorname{sen}\frac{\lambda}{2}\operatorname{sen}\beta$, $z_1=e^{i\left(\alpha+\frac{\lambda}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$, $z_2=e^{i\left(\alpha+\frac{\lambda}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\lambda_0}{2}=\operatorname{tg}\frac{\lambda}{2}\cos\beta$, la transformación puede ser escrita en la forma $\frac{w-z_1}{w-z_2}=$ $=e^{i\lambda_0}\frac{z-z_1}{z-z_2}$. Si $|a|=\operatorname{sen}\frac{\lambda}{2}$, la transformación es parabólica y de la forma

$\frac{1}{w-z_0}=\frac{1}{z-z_0}+ih\bar{z}_0$, donde $z_0=e^{i\left(\alpha+\frac{\lambda}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}$, $h=\operatorname{tg}\frac{\lambda}{2}$. Si $|a|>\operatorname{sen}\frac{\lambda}{2}$, la transformación es hiperbólica. Si se toma $\operatorname{sen}\frac{\lambda}{2}=|a|\operatorname{sen}\beta$, $z_1=e^{i\left(\alpha+\frac{\lambda}{2}-\beta\right)}$,

$z_2=e^{i\left(\alpha+\frac{\lambda}{2}-\pi+\beta\right)}$, $K=\frac{\cos\frac{\lambda}{2}+\sqrt{|a|^2-\operatorname{sen}^2\frac{\lambda}{2}}}{\cos\frac{\lambda}{2}-\sqrt{|\alpha|^2-\operatorname{sen}^2\frac{\lambda}{2}}}$, la transformación se presenta en la forma $\frac{w-z_1}{w-z_2}=K\frac{z-z_1}{z-z_2}$. **248.** $\Gamma=2\operatorname{arctg}\frac{a}{h}$; $\Gamma=\frac{2a}{h}+O\left[\left(\frac{a}{h}\right)^2\right]$ para $\frac{a}{h}$ pequeño; $\Gamma=\pi-\frac{2h}{a}+O\left[\left(\frac{h}{a}\right)^2\right]$ para $\frac{h}{a}$ pequeño.

249. $\Gamma=\gamma+2\operatorname{arctg}\frac{x_0\operatorname{sen}\gamma}{1-x_0\cos\gamma}=2\operatorname{arctg}\left(\frac{1+x_0}{1-x_0}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)$; $\Gamma<\gamma$, si $x_0<0$, y $\Gamma>\gamma$, si $x_0>0$. **253.** 1) $w=-\frac{20}{z}$; 2) $w=-(2iz+1+2i)$. **254.** $w=\frac{z-\sqrt{h^2-R^2}}{z+\sqrt{h^2-R^2}}e^{i\alpha}$, $\rho=\frac{h}{R}+\sqrt{\left(\frac{h}{R}\right)^2-1}$. **255.** $h=\frac{5}{4}$; $w=2e^{i\alpha}\frac{4z-3}{4z+3}$ ó $w=e^{i\alpha}\frac{4z+3}{4z-3}$. **256.** $w=\frac{2z}{z+24}e^{i\alpha}$ ó $w=\frac{z+24}{3z}e^{i\alpha}$, $\rho=\frac{2}{3}$. **257.** $w=\lambda\frac{z-z_1'}{z-z_2'}$ ó $w=\lambda\frac{z-z_2'}{z-z_1'}$, donde λ es un número complejo cualquiera, $z_1'=z_1+\frac{u_1(z_2-z_1)}{d}$, $z_2'=z_1+\frac{u_2(z_2-z_1)}{d}$, $d=|z_2-z_1|$, $u_1=\frac{1}{2d}(r_1^2+d^2-r_2^2-$

$$-\sqrt{[d^2-(r_1+r_2)^2][d^2-(r_1-r_2)^2]}),\ u_2=\frac{1}{2d}(r_1^2+d^2-r_2^2+$$

$+\sqrt{[d^2-(r_1+r_2)^2][d^2-(r_1-r_2)^2]})$; $\mu\left(\text{ó }\frac{1}{\mu}\right)=\left|\frac{(d+r_2-u_1)(r_1-u_2)}{(d+r_2-u_2)(r_1-u_1)}\right|$.

258. 1) $\mu=2$; 2) $\mu=5+2\sqrt{6}$. **261.** El grupo será finito si α es conmensurable con π. **263.** Los recintos fundamentales (una de las formas posibles) están sombreados en la fig. 62. Los lados frontera equivalentes están unidos con flechas. Los puntos con números son los puntos inmóviles de las rotaciones que figuran en los grupos (el número indica la cantidad de rotaciones). Para los cinco ejemplos últimos se indica el paralelogramo del subgrupo doblemente periódico; en el ejemplo 7) es un cuadrado, y en los ejemplos 8) y 9) un rombo de ángulos de 120° y de 60°. *Observación*. Se puede demostrar que, salvo transformaciones lineales, los grupos 3)—9) agotan los grupos de transformaciones lineales con un punto de acumulación (así se denomina el punto de acumulación del conjunto formado por los puntos equivalentes entre sí). **264.** 1) $w=e^{i\alpha}z$; 2) $\frac{w-1}{w+1}=e^{i\alpha}\frac{z-1}{z+1}$; 3) $\frac{w-i}{w+i}=e^{i\alpha}\frac{z-i}{z+i}$; 4) $\frac{w-a}{1+\bar{a}w}=e^{i\alpha}\frac{z-a}{1+\bar{a}z}$. **270.** 1) y 2) La construcción es evidente; 3) las equidistantes de la "recta" $\alpha\beta$ (α y β son los puntos "infinitos" de esta recta) representan arcos de circunferencias con extremos en α y β (éstas se denominan *hiperciclos*); 4) las líneas límite para un haz de "rectas paralelas" con el "punto infinito" α común son las circunferencias tangentes (por dentro) en el punto α a la circunferencia unidad (éstas se denominan *oriciclos*). **271.** 2) Para construir el triángulo "rectilíneo" de ángulos φ_1, φ_2, φ_3, construimos el sector circular OAB de ángulo central $\Delta=\pi-(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3)$, trazamos la "recta" AB y las "rectas" que pasan por los puntos A y B, forman ángulos φ_2 y φ_3 con AB y se intersecan en el punto C. El ΔABC es el que se

busca. 272. 1) $w=i(z^2-a^2)$; 2) $w=\sqrt{z-\frac{p}{2}}-i\sqrt{\frac{p}{2}}$. 273. 1) $w=\frac{z^2}{a^2}$; 2) $w=\sqrt{\frac{z}{a}}$; 3) $w=\frac{A}{2}\left(\frac{z+1}{z-2}\right)^2$. 274. El recinto limitado por el caracol de Pascal $u=R(\cos\varphi+m\cos 2\varphi)$, $v=R(\operatorname{sen}\varphi+m\operatorname{sen}2\varphi)$. Si el origen de coordenadas del w-plano se toma en el punto $w=-Rm$, obtenemos la ecuación del caracol en la forma corriente: $\rho=R(1+2m\operatorname{sen}\theta)$ (en coordenadas polares). Para $m=0$ el caracol de Pascal se convierte en una circunferencia, para $m=\frac{1}{2}$ en una cardioide con el punto de retroceso $w=-\frac{R}{2}$. Las imágenes de las circun-

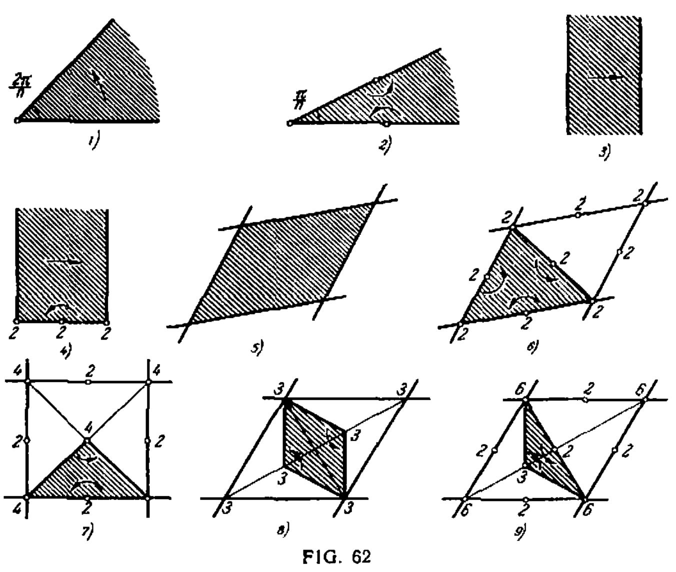


FIG. 62

ferencias $|z|=r<1$ también son caracoles de Pascal, las ecuaciones polares de los cuales se obtienen fácilmente trasladando el origen de coordenadas al punto $w=-Rmr^2$: $\rho=Rr(1+2mr\cos\theta)$. Las imágenes de los radios $\arg z=\alpha$ de una circunferencia son parábolas que pasan por el origen de coordenadas: $m(u\operatorname{sen}2\alpha-v\cos 2\alpha)^2+R\operatorname{sen}\alpha(u\operatorname{sen}\alpha-v\cos\alpha)=0$. A los radios $\alpha=0$ y $\alpha=\pi$ les corresponden los segmentos $0\leqslant u\leqslant R(1+m)$ y $R(m-1)\leqslant u\leqslant 0$ del eje real. **275.** El recinto está limitado por la parábola $u=-v^2$ y por la curva $\rho=2\cos\frac{\theta}{3}$, $|\theta|<\frac{3\pi}{4}$ (fig. 63). **276.** 1) El recinto está limitado por la epicicloide $u=R\left(\cos\varphi+\frac{\cos n\varphi}{n}\right)$, $v=R\left(\operatorname{sen}\varphi+\frac{\operatorname{sen}n\varphi}{n}\right)$ que tiene $(n-1)$ puntos de retroceso que son imágenes de los puntos $z=\sqrt[n-1]{-1}$; 2) el exterior de la hipo-

cicloide $u=R\left(\cos\varphi+\frac{\cos n\varphi}{n}\right)$, $v=R\left(\operatorname{sen}\varphi-\frac{\operatorname{sen} n\varphi}{n}\right)$ que tiene $(n+1)$ puntos de retroceso (imágenes de los puntos $z=\sqrt[n+1]{1}$). **277.** 1) $|m|\leqslant\frac{1}{n}$. El recinto está limitado por una epicicloide alargada (epitrocoide), es decir, por la *trayectoria del punto que se encuentra a una distancia de* mR del *centro* del círculo de radio $\frac{R}{n}$ que rueda exteriormente sobre un círculo de radio $\frac{R(n-1)}{n}$. 2) $|m|\leqslant\frac{1}{n}$. El exterior del círculo unidad, en el primer caso, y su interior, en el segundo caso, se transforman en el exterior de una hipocicloide "acortada" (hipotrocoide). **278.** 1) $w=z^{\frac{1}{\alpha}}$; 2) $w=\dfrac{2\left(\sqrt[3]{4}+1\right)e^{\frac{\pi i}{3}}z^{\frac{4}{3}}}{\left(\sqrt[3]{4}-2\right)e^{\frac{\pi i}{3}}z^{\frac{4}{3}}+3\sqrt[3]{4}}$.

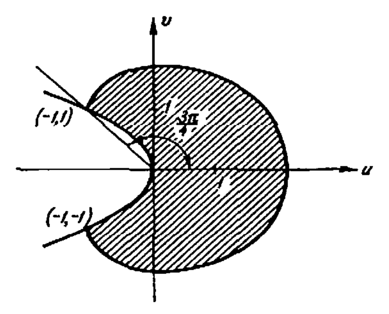


FIG. 63

279. 1) $w=\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2$; 2) $w=-\frac{z^2+1}{2z}$; 3) $w=\frac{-2z^2+3z-2}{2z^2+3z+2}$. **280.** 1) $w=\frac{z^2+2iz+1}{iz^2+2z+i}$; 2) $w=\frac{2z^2+3iz+2}{2z^2-3iz+2}$. **281.** $w=\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2$. **282.** 1) $w=\left(\frac{z^{\frac{1}{\alpha}}+R^{\frac{1}{\alpha}}}{z^{\frac{1}{\alpha}}-R^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^2$; 2) $w=\left(\frac{z^{\frac{1}{\alpha}}-R^{\frac{1}{\alpha}}}{z^{\frac{1}{\alpha}}+R^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^2$. **283.** 1) $w=-\left(\frac{2z+\sqrt{3}-i}{2z-\sqrt{3}-i}\right)^{\frac{3}{2}}$; 2) $w=-\left(\frac{2z+\sqrt{3}-i}{2z-\sqrt{3}-i}\right)^3$; 3) $w=\left(\frac{2z+\sqrt{3}-i}{2z-\sqrt{3}-i}\right)^3$; 4) $w=i\left(\frac{2z+\sqrt{3}-i}{2z-\sqrt{3}-i}\right)^{\frac{3}{2}}$; 5) $w=\left[\frac{z-\sqrt{2}(1-i)}{z-\sqrt{2}(1+i)}\right]^4$. **284.** $w=e^{\frac{\pi i}{3}}\times\times\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{2}{3}}$. **285.** $w=\sqrt{\frac{z+1}{1-z}}$. **286.** $w=\sqrt{\frac{z+i}{i-z}}$. **287.** $w=\sqrt{\frac{z-z_1}{z_2-z}}$. **288.** $w=\sqrt{\frac{z+R}{z-R}}$. **289.** $w=e^{-\frac{\pi i}{8}}\sqrt{z-i}$. **290.** $w=e^{\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2h}{1-h^2}}\sqrt{\frac{z+1}{z-1}}$.

291. $w=\sqrt{z^2+h^2}$. **292.** $w=\frac{\sqrt{z^2+h^2}}{z}$. **293.** $w=\sqrt{\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$.

294. $w=\sqrt{\left(\frac{z^{\frac{1}{\beta}}-1}{z^{\frac{1}{\beta}}+1}\right)^2+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2\beta}}$. **295.** $w=\sqrt{\frac{(1-z)^{\frac{2}{3}}-(1+z)^{\frac{2}{3}}}{(1-z)^{\frac{2}{3}}+(1+z)^{\frac{2}{3}}}+\frac{1}{3}}$.

296. $w=\left(\frac{\sqrt{z}+1}{\sqrt{z}-1}\right)^2$. La solución de los problemas 1) ó 2) se obtiene escogiendo una u otra rama de $\sqrt{z}$. **297.** $w=\frac{z}{(1-z)^2}$. **298.** A las circunferencias $|z|=R$ (fig. 64) les corresponden elipses confocales $\frac{4u^2}{\left(R+\frac{1}{R}\right)^2}+\frac{4v^2}{\left(R-\frac{1}{R}\right)^2}=1$ (a la circunferencia $|z|=1$ le corresponde el segmento $v=0$, $-1\leqslant u\leqslant 1$); a los

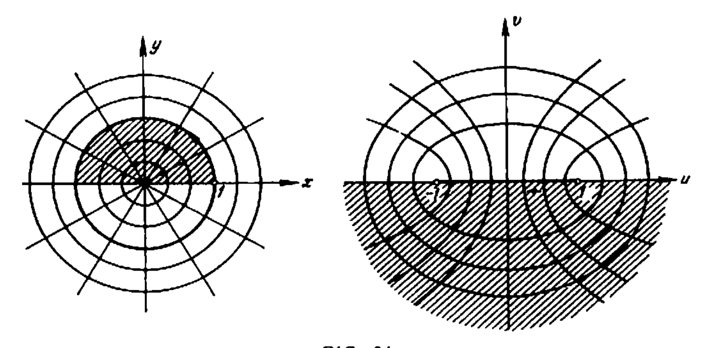


FIG. 64

rayos $\arg z=\alpha$ les corresponden las ramas de las hipérbolas confocales $\frac{u^2}{\cos^2\alpha}-\frac{v^2}{\operatorname{sen}^2\alpha}=1$ (al rayo $\arg z=0$ le corresponde el rayo $v=0$, $u\geqslant 1$, al rayo $\arg z=\pi$ le corresponde al rayo $v=0$, $u\leqslant -1$: a los rayos $\arg z=\pm\frac{\pi}{2}$ les corresponde el eje $u=0$). **299.** 1) y 2) El exterior de la elipse $\frac{4u^2}{\left(R+\frac{1}{R}\right)^2}+$ $+\frac{4v^2}{\left(R-\frac{1}{R}\right)^2}=1$ (fig. 65, *1*, *2*); 3) y 4) todo el plano con un corte a lo largo del segmento $[-1, 1]$ (fig. 65, *3*, *4*); 5) y 6) todo el plano con cortes a lo largo de los rayos $(-\infty, -1]$ y $[1, \infty)$ del eje real; 7) el semiplano inferior; 8) el semiplano superior; 9) el semiplano superior; 10) la mitad superior del interior de la elipse $\frac{4u^2}{\left(R+\frac{1}{R}\right)^2}+\frac{4v^2}{\left(R-\frac{1}{R}\right)^2}=1$; 11) la mitad inferior del interior de

la elipse $\dfrac{4u^2}{\left(R+\dfrac{1}{R}\right)^2}+\dfrac{4v^2}{\left(R-\dfrac{1}{R}\right)^2}=1$; 12) la mitad de la derecha del interior de la elipse $\dfrac{4u^2}{\left(R+\dfrac{1}{R}\right)^2}+\dfrac{4v^2}{\left(R-\dfrac{1}{R}\right)^2}=1$ con un corte a lo largo del segmento $\left[1, \dfrac{1}{2}\left(R+\dfrac{1}{R}\right)\right]$; 13) el recinto comprendido entre las ramas de la hipérbola $\dfrac{u^2}{\operatorname{sen}^2\alpha}-\dfrac{v^2}{\cos^2\alpha}=1$. **300.** 1) A las circunferencias $|z|=R$ les corresponden las elipses $\dfrac{4u^2}{\left(R-\dfrac{1}{R}\right)^2}+\dfrac{4v^2}{\left(R+\dfrac{1}{R}\right)^2}=1$ (a la circunferencia $|z|=1$ le corresponde

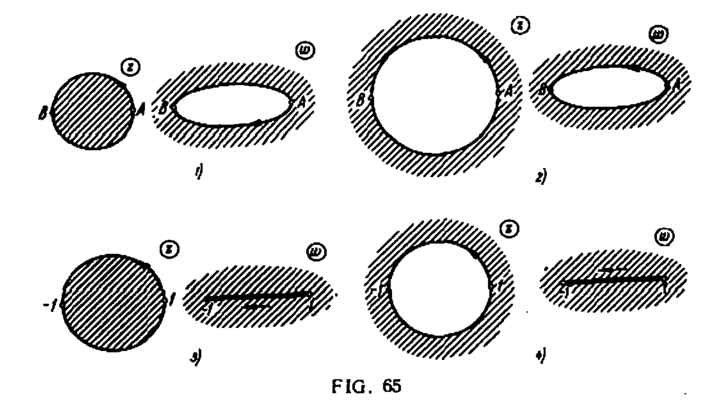
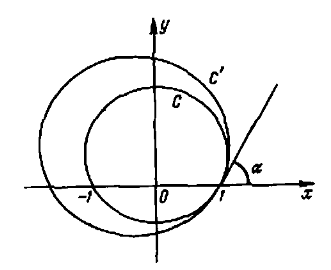


FIG. 65

el segmento $u=0$, $-1\leqslant v\leqslant 1$), a los rayos $\arg z=\alpha$ les corresponden las ramas de las hipérbolas $\dfrac{v^2}{\operatorname{sen}^2\alpha}-\dfrac{u^2}{\cos^2\alpha}=1$ (a los rayos $\varphi=0$ y $\varphi=\pi$ les corresponde el eje $v=0$, al rayo $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$ le corresponde el rayo $u=0$, $v\geqslant 1$ y al rayo $\varphi=-\dfrac{\pi}{2}$ le corresponde el rayo $u=0$, $v\leqslant -1$); 2) a las circunferencias $|z|=R$ les corresponden las elipses $\dfrac{4u^2}{\left(R+\dfrac{a^2}{R}\right)^2}+\dfrac{4v^2}{\left(R-\dfrac{a^2}{R}\right)^2}=1$ (a la circunferencia $|z|=a$ le corresponde el segmento $v=0$, $-a\leqslant u\leqslant a$) y a los rayos $\arg z=\alpha$ les corresponden las ramas de la hipérbola $\dfrac{u^2}{a^2\cos^2\alpha}-\dfrac{v^2}{a^2\operatorname{sen}^2\alpha}=1$ (al rayo $\arg z=0$ le corresponde el rayo $v=0$, $u\geqslant a$, al rayo $\arg z=\pi$ le corresponde el rayo $v=0$, $u\leqslant -a$ y a los rayos $\arg z=\pm\dfrac{\pi}{2}$ les corresponde el eje $u=0$); 3) las familias de elipses e hipérbolas confocales que se obtienen de las correspondientes familias formadas por la función de Zhukovski (véase el problema 298) mediante una rotación de ángulo γ y mediante una transformación de semejanza con el coeficiente de

semejanza igual a $|c|$ (el centro de semejanza se encuentra en el origen de coordenadas). **301.** 1) $w=\frac{e^{i\alpha}}{c}(z+\sqrt{z^2-c^2})$; 2) $w=\frac{1}{a+b}(z+\sqrt{z^2-(a^2-b^2)})$; en ambos casos para una selección de la rama de la raíz obtenemos la transformación en el exterior del círculo unidad y para la otra selección, en su interior. **302.** $w=\frac{az-b\sqrt{z^2-(a^2-b^2)}}{a^2-b^2}$. **303.** $w=A\,(z+\sqrt{z^2-(a^2-b^2)})$, donde A es un número complejo cualquiera; $\mu=\frac{a-b}{\sqrt{a^2+k^2}-\sqrt{b^2+k^2}}$. **304.** Para $a>0$, todo el plano con un corte a lo largo del segmento $\left[-1,\ \frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)\right]$; para $a<0$, todo el plano con cortes a lo largo de los rayos $\left[-\infty,\ \frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)\right]$ y $[-1,\ +\infty]$. **305.** $w=\sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}{\frac{5}{4}-\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}}$. **306.** $w=\sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(a+\frac{1}{a}\right)-\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]}$. **307.** $w=\sqrt{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}+a+\frac{1}{a}\right)}$. **308.** $w=\frac{\sqrt{\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)+\left(\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}\right)}}{z+\frac{1}{z}}$. **309.** $w=\sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}\right)+\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)\right]}$.



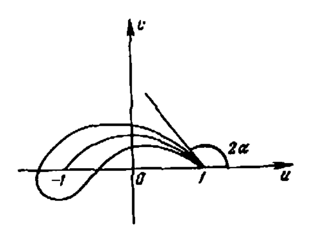


FIG. 66

310. $\left[1+\frac{h^2}{4(1-h)}\right]\left(w+\frac{1}{w}\right)=\left(\frac{z}{e^{i\alpha}}+\frac{e^{i\alpha}}{z}\right)-\frac{h^2}{2(1-h)}$. **311.** $w+\frac{1}{w}=\frac{4a}{(1+a)^2}\left(z+\frac{1}{z}\right)-2\frac{(1-a)^2}{(1+a)^2}$; $w'(0)=\frac{(1+a)^2}{4a}$; la longitud del arco correspondiente al corte es igual a $2\arccos\frac{6a-1-a^2}{(1+a)^2}$ y es igual a π para $a=3-\sqrt{8}$.
312. $w+\frac{1}{w}=2\frac{2\left(z+\frac{1}{z}\right)-\left(a+\frac{1}{a}\right)+\left(b+\frac{1}{b}\right)}{\left(a+\frac{1}{a}\right)+\left(b+\frac{1}{b}\right)}$; $w'(0)=\frac{a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}}{4}$; las longitudes de los arcos correspondientes a los cortes son iguales a

$$2 \arccos \frac{4-\left(a+\frac{1}{a}\right)+\left(b+\frac{1}{b}\right)}{\left(a+\frac{1}{a}\right)+\left(b+\frac{1}{b}\right)} \text{ y a } 2\pi-2 \arccos \frac{-4-\left(a+\frac{1}{a}\right)+\left(b+\frac{1}{b}\right)}{\left(a+\frac{1}{a}\right)+\left(b+\frac{1}{b}\right)}.$$

313. 1) La imagen de la circunferencia C es el arco circular que tiene los extremos en los puntos ± 1, y que forma el ángulo 2α con el eje real en el punto 1; el exterior de esta circunferencia se transforma en todo el plano con un corte a lo largo del arco indicado; 2) la imagen de la circunferencia C es (fig. 66) una curva cerrada (*perfil de Zhukovki*) con un punto de retroceso en $w=1$ y con la particularidad de que la tangente en este punto forma con el eje real el ángulo 2α; el arco circular con extremos en los puntos ± 1, del cual se trata en el punto 1), está contenido en el recinto limitado por el perfil de Zhukovski; el exterior de la circunferencia C se transforma en el exterior del perfil de Zhukovski.

314. 1) La imagen de la circunferencia C es una curva cerrada, compuesta por dos arcos circulares con extremos comunes en los puntos ± 1 y con la particularidad de que las tangentes en el punto 1 a estos arcos forman con el eje real ángulos iguales respectivamente a $2\alpha-\alpha\delta$ y $2\alpha+(\pi-\alpha)\delta$; el exterior de la circunferencia se transforma en el exterior del recinto limitado por los arcos indicados; la imagen de la circunferencia C' es (fig. 67) una curva cerrada con un punto anguloso en $w=1$ y con la particularidad de que las tangentes en este punto forman con el eje real ángulos iguales, respectivamente, a $2\alpha-\alpha\delta$ y $2\alpha+(\pi-\alpha)\delta$; la imagen de la circunferencia C está contenida en el recinto limitado por la imagen de la circunferencia C'; el exterior de la circunferencia C' se transforma en el exterior de la imagen de esta circunferencia. 2) El interior de la circunferencia C se transforma en el exterior del recinto limitado por los arcos circulares que pasan por los puntos -1 y 1 con la particularidad de que sus tangentes en el punto 1 forman con el eje real ángulos iguales, respectivamente, a: a) $2\alpha+(\pi-\alpha)\delta$ y $2\alpha+(2\pi-\alpha)\delta$, si la función $w(z)$ está definida en el z—plano con un corte a lo largo del arco de la circunferencia C que pertenece al semiplano inferior y b) $2\alpha-\alpha\delta$ y $2\alpha-(\pi+\alpha)\delta$, si el corte que define a la función $w(z)$ se hace a lo largo del arco de la circunferencia C perteneciente al semiplano superior.

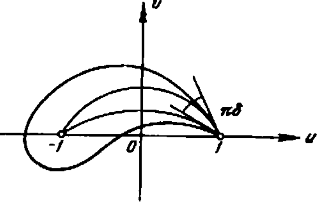


FIG. 67

315. $\frac{w-1}{w+1}=\left(\frac{ze^{i\gamma}+ie^{i\frac{\beta}{2}}}{ze^{i\gamma}+ie^{-i\frac{\beta}{2}}}\right)^2$, donde $\gamma=\alpha$ para $\beta>0$ y $\gamma=\alpha+\pi$ para $\beta<0$. **316.** Todo el plano con cortes a lo largo de los rayos $y=0$, $x\leqslant-\frac{1}{2}$ e $y=0$, $x\geqslant\frac{1}{2}$. **317.** El semiplano $x>\frac{1}{2}$ con un corte a lo largo del segmento $y=0$, $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$. **318.** Todo el plano con cortes a lo largo de los rayos $y=0$, $1\leqslant x<\infty$ e $y=0$, $-\infty<x\leqslant-1$. **319.** El ángulo $-\frac{\pi}{n}<\arg z<\frac{\pi}{n}$ con un corte a lo largo del rayo $y=0$, $\sqrt[n]{\frac{1}{4}}\leqslant x<\infty$. **320.** 1) Todo el plano con cortes a lo largo de los rayos $|w|\geqslant\frac{1}{\sqrt[n]{4}}$, $\arg w=\frac{2k\pi}{n}$ $(k=0, 1, \ldots, n-1)$;

2) $w=\frac{(1+z^n)^{\frac{2}{n}}}{\sqrt[n]{4}\,z}$. 321. 1) $w=\sqrt{z^2+\sqrt{z^4-1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{z^2+1}+\sqrt{z^2-1})$;

2) $w=\frac{\sqrt{1+\sqrt{1-z^4}}}{z}=\frac{1}{z\sqrt{2}}(\sqrt{1+z^2}+\sqrt{1-z^2})$.

322. 1) $w=(\alpha^n+\alpha^{-n})^{-\frac{1}{n}}\sqrt[n]{z^n+z^{-n}+\sqrt{(z^n+z^{-n})^2-(\alpha^n+\alpha^{-n})^2}}$.

Solución. La función $\zeta=\frac{1}{2}\left(z^n+\frac{1}{z^n}\right)$ transforma el sector en el semiplano inferior de manera que los puntos α y $\alpha e^{\frac{\pi i}{n}}$ pasan a los puntos $\pm\frac{1}{2}\left(\alpha^n+\frac{1}{\alpha^n}\right)$. Después es preciso comprimir el semiplano $\left(p=\frac{\zeta}{\frac{1}{2}(\alpha^n+\alpha^{-n})}\right)$ y transformarlo en el semicírculo unidad $(\tau=p+\sqrt{p^2-1})$. La función $w=\sqrt[n]{\tau}$ es la deseada.

2) $w=\left(\alpha^{\frac{n}{2}}+\alpha^{-\frac{n}{2}}\right)^{-\frac{2}{n}}\left(z^{\frac{n}{2}}+z^{-\frac{n}{2}}+\sqrt{\left(z^{\frac{n}{2}}+z^{-\frac{n}{2}}\right)^2-\left(\alpha^{\frac{n}{2}}+\alpha^{-\frac{n}{2}}\right)^2}\right)^{\frac{2}{n}}$.

323. $w=\sqrt{\frac{\sqrt{z^2+c^2}+\sqrt{a^2+c^2}}{\sqrt{b^2+c^2}-\sqrt{z^2+c^2}}}$ y $w=\frac{1}{\beta}(\sqrt{z^2+c^2}+\alpha+\sqrt{(\sqrt{z^2+c^2}+\alpha)^2\beta^2})$,

donde $\alpha=\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+c^2}-\sqrt{b^2+c^2})$, $\beta=\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+c^2}+\sqrt{b^2+c^2})$.

324. $w=\sqrt{\sqrt{z^2+c^2}+\sqrt{a^2+c^2}}$.

325. $w=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2+1}+\sqrt{\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2-1}\right)$.

326. $w=\sqrt{\frac{\sqrt{z^2-1}+z-i}{\frac{\sqrt{\alpha^2+1}}{\alpha+1}(z-i)-\sqrt{z^2-1}}}$.

327. $w=\sqrt{\frac{\sqrt{z_1^2+\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}+\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{b_1^2+\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}-\sqrt{z_1^2+\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}}}$ pera $b<1$;

$w=\sqrt{\sqrt{z_1^2+\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}+\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}$ para $b=1$;

$w=\sqrt{\frac{\sqrt{z_1^2+\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}+\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{z_1^2+\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}+\sqrt{b_1^2+\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}}}$ para $b>1$; $z_1=\frac{1+z}{1-z}$,

$b_1=\frac{1+b}{1-b}$.

328. $w=\dfrac{\sqrt{\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)+\left(b^2+\frac{1}{b^2}\right)}+\sqrt{\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)+\left(b^2+\frac{1}{b^2}\right)}}{\sqrt{\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)-\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)}}$.

329. $w=\dfrac{1}{\sqrt{2+\sqrt{5}}}\left(\sqrt{\sqrt{z^4+4}+2}+\sqrt{\sqrt{z^4+4}-\sqrt{5}}\right)$.

Solución. La función $\zeta=z^2$ transforma el semiplano superior con cortes a lo largo de los segmentos $[0, 1+i]$ y $[0, -1+i]$ en el recinto del problema 324 que lo transformamos después en el semiplano superior. La función hallada, según el principio de simetría, transforma el recinto dado en el plano con un corte a lo largo del segmento. Resta transformer el exterior de este segmento en el exterior del círculo unidad.

330. $w=\dfrac{i}{\sqrt{2}}\left[(z+\sqrt{z^2-1})^{\frac{\pi}{\alpha}}+(z+\sqrt{z^2-1})^{-\frac{\pi}{\alpha}}+2\right]^{\frac{1}{2}}=$

$=\dfrac{i}{\sqrt{2}}\left[(z+\sqrt{z^2-1})^{\frac{\pi}{2\alpha}}+(z+\sqrt{z^2-1})^{-\frac{\pi}{2\alpha}}\right]$.

Solución. Mediante la función $\tau=\zeta^{\frac{\pi}{\alpha}}$, donde $\zeta=z+\sqrt{z^2-1}$ es la inversa de la función de Zhukovski, la mitad superior del recinto dado se transforma en el recinto $|\tau|>1$, $\operatorname{Im}\tau>0$ que, a su vez, se transforma mediante la función de Zhukovski en el semiplano superior. Aplicando el principio de simetría, obtenemos la transformación del interior de la rama de la derecha de la hipérbola en todo el plano con un corte a lo largo del rayo $(-\infty, -1]$; es fácil transformar este último recinto en el semiplano superior. *Observación*. El factor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ no tiene importancia ya que la transformación $w'=kw\ (k>0)$ transforma el semiplano en sí misma. **331.** $w=[e^{-i\alpha}(z+\sqrt{z^2-1})]^{\frac{\pi}{2\beta}}-[e^{-i\alpha}(z+\sqrt{z^2-1})]^{-\frac{\pi}{2\beta}}$, donde $\beta=\pi-\alpha$. **332.** $w=\left[e^{-i\alpha}\dfrac{z+\sqrt{z^2-c^2}}{c}\right]^p$, donde $c=\sqrt{a^2+b^2}$, $\alpha=\operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}$, $p=\dfrac{\pi}{2\operatorname{arctg}\frac{a}{b}}$. **333.** 1) El recinto se construye del siguiente modo: el anillo $r_1^2<|w|<r_2^2$ se corta a lo largo del segmento $r_1^2\leqslant u\leqslant r_2^2$ del eje real y al borde inferior del corte se pega la parte $r_1^2<|w|<r_2^2$, $0\leqslant \arg w<2\alpha$ de otro anillo semejante; si $\alpha=\pi$, el segundo anillo es completo y su extremo libre debe ser pegado con el extremo libre del primer anillo (en este caso obtenemos un anillo $r_1^2<|w|<r_2^2$ de dos hojas); 2) si $a\leqslant 1$, la desigualdad $|z^2-1|<a$ determina dos recintos (véase el problema 39), cada uno de los cuales se transforma en un círculo $|w-1|<a$ de una hoja; en cambio si $a>1$, la desigualdad $|z^2-1|<a$ determina un recinto que se transforma en el círculo $|w-1|<a$ de dos hojas (para construir este círculo de dos hojas es suficiente cortar dos ejemplares idénticos del círculo $|w-1|<a$ a lo lergo de cualquier radio y peger el borde inferior del corte del primer ejempler con el borde superior del corte del segundo ejemplar y el borde superior del corte del primer ejempler, con el borde inferior del corte del segundo ejempler). **334.** 1) El recinto se construye del siguiente modo: al plano w cortado a lo lergo del segmento $[-1, 1]$ se pega el interior de la elipse

$\dfrac{4u^2}{\left(R+\dfrac{1}{R}\right)^2}+\dfrac{4v^2}{\left(R-\dfrac{1}{R}\right)^2}=1$, también cortada a lo largo del segmento $[-1, 1]$, de manera que al borde inferior del corte del plano se pega el borde superior del corte de la elipse y al borde superior del corte del plano se pega el borde inferior del corte de la elipse; 2) el recinto de dos hojas $\left|\dfrac{w-1}{w+1}\right| < R^2$ (la desigualdad $\left|\dfrac{w-1}{w+1}\right| < R^2$ determina el interior de este círculo para $R < 1$, el semiplano para $R=1$ y el exterior del círculo para $R > 1$). El corte y las pegaduras correspondientes se realizan a lo largo de una línea que une el punto $w=1$ con un punto frontera del recinto $\left|\dfrac{w-1}{w+1}\right| < R^2$. **335.** 1) y 2) La superficie se compone de dos hojas del plano z cortadas a lo largo del segmento $[-1, 1]$ y pegadas de manera que el borde inferior del corte de la primera hoja se pega al borde superior del corte de la segunda y el borde superior del corte de la primera hoja se pega al borde inferior del corte de la segunda. **336.** 1) y 2) La superficie se compone de dos hojas cortadas a lo largo de los rayos que van desde los puntos $-i$, 0, i, respectivamente, al infinito, por ejemplo, paralelamente al eje real y en su dirección positiva. Los bordes inferiores de los cortes de la primera hoja se pegan a los bordes superiores de los cortes correspondientes de la segunda hoja y viceversa. **337.** La superficie se compone de tres hojas del plano z cortadas a lo largo de los rayos $(-\infty, -1]$ y $[1, \infty)$. A lo largo del rayo $(-\infty, 1]$ las hojes se pegan del modo siguiente: el borde superior del corte de la primera hoja se pega al borde inferior del corte de la segunda hoja, el borde superior del corte de la segunda hoja se pega al borde inferior del corte de la tercera hoja y el borde superior del corte de la tercera hoja se pega al borde inferior del corte de la primera hoja. A lo largo del rayo $[1, \infty)$ es preciso pegar: el borde inferior del corte de la primera hoja al borde superior del corte de la segunda hoja, el borde inferior del corte de la segunda hoja al borde superior del corte de la tercera hoja y el borde inferior del corte de la tercera hoja al borde superior del corte de la primera hoja. **338.** 1) En la red polar $\rho=\text{const}$, $\theta=\text{const}$; 2) en las espirales $\rho=e^{\frac{\theta-b}{k}}$ (en los rayos $\theta=b$ para $k=0$); 3) en el ángulo $\alpha < \theta < \beta$ (para $\alpha=0$ y $\beta=2\pi$, en el plano cortado a lo largo de la parte positiva del eje real); 4) en todo el plano cortado a lo largo de la espiral $\rho=e^{\theta}$; 5) en el sector $\rho < 1$, $0 < \theta < \alpha$ (para $\alpha=2\pi$, en el círculo unidad cortado a lo largo del rayo $v=0$, $0 \leqslant u \leqslant 1$); 6) en el recinto $\rho > 1$, $0 < \theta < \alpha$ (para $\alpha=2\pi$ en el exterior del círculo unidad con un corte a lo largo del rayo $v=0$, $1 \leqslant u < \infty$); 7) en el recinto $e^{\alpha} < \rho < e^{\beta}$, $\gamma < \theta < \delta$ (para $\delta-\gamma=2\pi$ este recinto resulta un anillo concéntrico con un corte a lo largo del segmento $\theta=\gamma$, $e^{\alpha} \leqslant \rho \leqslant e^{\beta}$). **339.** El ángulo $0 < \arg(z+n) < \dfrac{\pi}{n}$; la franja $0 < y < \pi$. **340.** 1) En la red cartesiana rectangular $u=C$, $v=C$; 2) en rectas; 3) en la franja $0 < v < \alpha$; 4) en la semifranja $u < 0$, $0 < v < \alpha$; 5) en el rectángulo $\ln r_1 < u < \ln r_2$, $0 < v < 2\pi$. **341.** 5) $b=a\left|\text{th}\dfrac{\xi_0}{2}\right|$, $l=a\left|\text{tg}\dfrac{\eta_0}{2}\right|$. **342.** 1) La familia $x=C$ se transforma en la familia de hipérbolas confocales de focos en los puntos ± 1 $\left(\dfrac{u^2}{\cos^2 C}-\dfrac{v^2}{\text{sen}^2 C}=1\right)$; la familia $y=C$ se transforma en la familia de elipses confocales de los mismos focos $\left(\dfrac{u^2}{\text{ch}^2 C}+\dfrac{v^2}{\text{sh}^2 C}=1\right)$; 2) en el semiplano superior; 3) en el cuarto cuadrante; 4) en el semiplano de la derecha con un corte a lo largo del segmento $[0, 1]$; 5) en todo el plano con cortes a lo largo de los rayos $(-\infty, -1]$, y $[1, \infty)$ del eje real; 6) en el interior de la elipse

$\frac{u^2}{\text{ch}^2 h}+\frac{v^2}{\text{sh}^2 h}=1$ con cortes a lo lergo de los segmentos $[-\text{ch}\,h,\ -1]$ y $[1,\ \text{ch}\,h]$.
343. 1) En la semifranja $-\frac{\pi}{2}<u<\frac{\pi}{2}$, $v>0$; 2) en la franja $-\frac{\pi}{2}<u<\frac{\pi}{2}$; 3) en la semifranja $0<u<\frac{\pi}{2}$, $v>0$; 4) en la franja $-\frac{\pi}{2}<u<0$. **344.** 1) La familia $x=C$ se transforma en la familia de elipses confocales de focos en los puntos $\pm 1\left(\frac{u^2}{\text{ch}^2 C}+\frac{v^2}{\text{sh}^2 C}=1\right)$; la familia $y=C$ se transforma en la familia de hipérbolas confocales de focos en los mismos puntos $\left(\frac{u^2}{\cos^2 C}-\frac{v^2}{\text{sen}^2 C}=1\right)$; 2) en todo el plano con cortes a lo largo de los rayos $(-\infty,\ -1]$ y $[1,\ \infty)$ del eje real; 3) en el semiplano superior. **345.** 1) En la franja $-\frac{\pi}{2}<v<\frac{\pi}{2}$; 2) en la semifranja $0<v<\frac{\pi}{2}$, $u>0$. **346.** 1) La familia $x=C$ se transforma en el haz de arcos circulares con los extremos en los puntos $w=\pm i$ que incluye también las partes correspondientes del eje imaginario; la ecuación del haz de circunferencias es: $(u-a)^2+v^2=1+a^2$ $(a=\text{ctg}\,2C)$; la familia $y=C$ se transforma en la familia de circunferencias de Apolonio respecto a los puntos $w=\pm i$ (que incluye también el eje real); la ecuación de la familia de circunferencias de Apolonio es: $u^2+(v-b)^2=b^2-1$, $|b|>1$ $(b=\text{cth}\,2C)$; 2) en el semiplano superior con un corte a lo largo del segmento $0\leqslant v\leqslant 1$ del eje imaginario; 3) en todo plano con un corte a lo largo del segmento $-1\leqslant v\leqslant 1$ del eje imaginario; 4) en el semicírculo $|w|<1$, $\text{Re}\,w>0$; 5) en el círculo unidad. **347.** 1) En todo el plano con cortes a lo largo de los rayos $(-\infty,\ -1]$ y $[1,\ \infty)$ del eje real; 2) en el semiplano de la derecha con un corte a lo largo del rayo $[1,\ \infty)$ del eje real. **348.** $w=e^{\frac{\pi(1-i)z}{h}}$.

349. $w=-ch\,\frac{(z-1)\pi}{h}$. **350.** $w=e^{\frac{2\pi i z}{z-2}}$. **351.** $w=e^{\frac{\pi i(z+2)}{3(z-2)}}$.

352. $w=\cos\frac{\pi(z+2)}{2z}$. **353.** $w=e^{\frac{\pi}{\sqrt{2}-1}(\sqrt{z}-i)}$. **354.** 1) $w=-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\,\text{th}\,\frac{\pi i(z+3i)}{4(z-1)}$; 2) $w=-\frac{e^{\pi i\frac{z+i}{z-i}}+2-i}{e^{\pi i\frac{z+i}{z-i}}+2+i}$; 3) $w=\frac{2e^{\pi i\frac{z+i}{z-i}}}{1+e^{\pi i\frac{z+i}{z-i}}}$.

355. 1) $w=\sqrt{e^{2\pi i z}+e^{-2\pi h}}$; 2) $w=\sqrt{\frac{e^{2\pi i z}+e^{-2\pi h_1}}{e^{2\pi i z}+e^{-2\pi h_2}}}$.

356. $w=\sqrt{\frac{\cos\pi z-\cos\pi h}{1+\cos\pi z}}$. **357.** $w=\sqrt{\frac{\cos\pi z-\cos\pi h_1}{\cos\pi z+\cos\pi h_2}}$.

358. $w=\sqrt{\cos 2z+\text{ch}\,2h}$. **359.** $w=\sqrt{\frac{\cos 2z+\text{ch}\,2h}{\cos 2z+1}}$.

360. $w=\sqrt{\frac{\cos 2z+\text{ch}\,2h_1}{\cos 2z+\text{ch}\,2h_2}}$. **361.** $w=\sqrt{\frac{\text{sen}\,\frac{\pi}{z}}{1+\text{sen}\,\frac{\pi}{z}}}$. **362.** $w=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{4\pi}{z}}{\cos\frac{4\pi}{z}-\cos\frac{4\pi}{a}}}$. **363.** $w=\sqrt{\frac{\cos\frac{4\pi}{z}-\cos\frac{4\pi}{b}}{\cos\frac{4\pi}{z}-\cos\frac{4\pi}{a}}}$. **364.** $w=$

$$=\sqrt{\frac{\cos\frac{2\pi}{z}-\cos\frac{2\pi}{b}}{\cos\frac{2\pi}{z}-\cos\frac{2\pi}{a}}}.$$ **365.** $w=\sqrt{\frac{e^{-\frac{2\pi}{\beta}}-e^{\frac{2\pi i}{z}}}{e^{\frac{2\pi}{\alpha}}-e^{\frac{2\pi i}{z}}}}$. **366.** $w=\sqrt{\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{h}-\cos\frac{\pi}{z}}{1-\cos\frac{\pi}{z}}}$.

367. $w=i\operatorname{ch}^2\frac{\pi\sqrt{z}}{2\alpha}$, $w=\operatorname{th}^2\frac{\pi\sqrt{z}}{4\alpha}$ (véase la observación a la respuesta al problema 330). **368.** $w=\operatorname{arcsen}\frac{\operatorname{sen} z}{\operatorname{ch}\alpha}$. *Solución*. La función sen z transforma la semifranja $y>0$, $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ en el semiplano superior; además, los puntos $\pm\frac{\pi}{2}+ai$ pasan a los puntos $\pm\operatorname{ch} a$. De aquí es fácil deducir que la función $w=\pm\operatorname{arc\,sen}\frac{\operatorname{sen} z}{\operatorname{ch} a}$ *transformará* la semifranja indicada en sí misma de manera que a los rayos $x=\pm\frac{\pi}{2}$, $a\leqslant y>\infty$ les corresponderán los rayos $u=\frac{\pi}{2}$, $0\leqslant v<\infty$. Aplicando un número indefinido de veces el principio de simetría, comprobamos que la función hallada es la que se requería. **369.** $w=\frac{b\operatorname{arcsen}\frac{i\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} a}}{\operatorname{arcsen}\frac{1}{\operatorname{ch} a}}$

370. $w=\frac{\operatorname{arcsen}\frac{1}{\operatorname{ch} a}+\sqrt{\left(\operatorname{arcsen}\frac{i}{\operatorname{ch} a}\right)^2-\left(\operatorname{arcsen}\frac{\operatorname{sen} z}{\operatorname{ch} a}\right)^2}}{\operatorname{arcsen}\frac{\operatorname{sen} z}{\operatorname{ch} a}}$. **371.** $w=$

$=\sqrt{\frac{\operatorname{arcsen}\frac{\operatorname{sen} z}{\operatorname{ch} a}-\operatorname{arcsen}\frac{\operatorname{sen} p}{\operatorname{ch} a}}{\operatorname{arcsen}\frac{\operatorname{sen} q}{\operatorname{ch} a}-\operatorname{arcsen}\frac{\operatorname{sen} z}{\operatorname{ch} a}}}$. **372.** $w=\operatorname{arcsen} e^{2iz}$. *Solución*. La función $\zeta=e^{2iz}$ transforma la semifranja $0<x<\frac{\pi}{2}$ en el semiplano superior y la función $w=\operatorname{arcsen}\zeta$ transforma el semiplano superior en la semifranja $-\frac{\pi}{2}<u<\frac{\pi}{2}$, $v>0$. La función $w=\operatorname{arcsen} e^{2iz}$, que transforma una franja en una semifranja, transforma los rayos $x=0$, $-\infty<y<0$ y $x=\frac{\pi}{2}$, $-\infty<y<0$ en los rayos $x=\frac{\pi}{2}$, $0<y<\infty$ y $x=-\frac{\pi}{2}$, $0<y<\infty$, respectivamente. Aplicando un número indefinido de veces el principio de simetría, comprobamos que la función hallada realiza la transformación requerida. **373.** 1) El rectángulo curvilíneo $1<\rho<e^a$, $0<\theta<b$, si $b<2\pi$; el anillo $1<\rho<e^a$ con un corte a lo largo del segmento $[1, e^a]$, si $b=2\pi$; para $b=2k\pi$ ($k=2, 3, \ldots$) se obtiene un recinto de varias hojas compuesto por k anillos $1<\rho<e^a$ cortados a lo largo del segmento $[1, e^a]$ y pegados de manera que el borde inferior del corte del primer anillo se pega al borde superior del corte del segundo anillo, el borde inferior del corte del segundo anillo se pega al borde superior del corte del tercer anillo, etc.; si $b=2k\pi+\beta$ ($k=2, 3, \ldots, 0<\beta<2\pi$), al borde inferior libre del último anillo de la superficie construida debe pegarse a lo largo del segmento $[1, e^a]$ el rectángulo cirvilíneo $1<\rho<e^a$, $0<\theta<\beta$; 2) el recinto de infinitas hojas, compuesto por los anillos $1<\rho<e^a$ cortados a lo largo del segmento $[1, e^a]$ y pegados de la forma indicada más arriba; 3) el recinto de infinitas hojas, compuesto por los anillos $1<\rho<e^a$, cortados a lo largo del segmento $[1, e^a]$, enumerados mediante los números enteros $(\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots)$ y pegados de manera que el borde inferior del

corte de cada anillo se pega al borde superior del corte del anillo cuyo número es mayor en una unidad. Este recinto es parte de la superficie de Riemann, sobre el anillo $1 < \rho < e^a$, de la función $\operatorname{Ln} w$. **374.** 1) El recinto de dos hojas que se obtiene al pegar dos simiplanos de la derecha, cada uno de los cuales está cortado a lo largo del rayo $v=0$, $1 \leqslant u < \infty$; los bordes de los cortes se pegan en cruz, es decir, de manera que el borde inferior del corte de la primera hoja se pega al borde superior del corte de la segunda hoja y viceversa; 2) el recinto de dos hojas, compuesto por dos planos que tienen cortes a lo largo de los rayos $-\infty < u \leqslant -1$ y $1 \leqslant u < \infty$ del eje real que se pegan en cruz a lo largo de los cortes $-\infty < u \leqslant -1$. Los bordes de los cortes $1 \leqslant u < \infty$ permanecen libres. **375.** El recinto de dos hojas, compuesto de dos planos cortados a lo largo del segmento $-1 \leqslant v \leqslant 1$ del eje imaginario y pegados de forma que el borde de la izquierda del corte de la primera hoja se pega al borde de la derecha del corte de la segunda hoja. Los demás bordes permanecen libres. **376.** La superficie de Riemann tiene infinitas hojas y dos puntos logarítmicos sobre los puntos $w=0$ y $w=\infty$. Los recintos de univalencia del z-plano, correspondientes a las hojas del w-plano con cortes a lo largo de la parte positiva del eje real, están limitados por las circunferencias $2k\pi(x^2+y^2)+y=0$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. **377.** $r_1=\infty$, $r_2=r_3=1$. La imagen del círculo $|z|<r_1$ es todo el plano salvo el punto $w=-1$; la imagen del círculo $|z|<r_2$ (y del círculo $|z|<r_3$) es el semiplano $\operatorname{Re} w > -\frac{1}{2}$. **378.** 1) $r_1=\frac{1}{2}$; 2) $r_1=\frac{1}{2|a|}$; 3) $r_1=1$. **383.** 1) $r_2=\frac{1}{4}$; 2) $r_2=\frac{1}{4|a|}$; 3) $r_2=2-\sqrt{3}$. **384.** $r_1=\pi$, $r_2=1$. **385.** 1) $r_2=\frac{1}{2}$; 2) $r_2=\frac{1}{2|a|}$; 3) $r_2=1$.

Capítulo III

388. 1) $I_1=2+i$, $I_2=1+\frac{i}{2}$; 2) $I_1=\frac{i\pi}{2}$, $I_2=-\frac{\pi}{2}$; 3) $I_1=i\pi R^2$, $I_2=-\pi R^2$. **389.** 1) $\sqrt{5}\left(1-\frac{i}{2}\right)$; 2) 2; 3) $2i$; 4) 0. **390.** πi. **391.** $\frac{4}{3}$. **392.** 1) $\frac{R^{n+1}}{n+1}[(-1)^{n+1}-1]$, si $n \neq -1$; πi, si $n=-1$; 2) y 3) 0, si $n \neq -1$; $2\pi i$, si $n=-1$. **393.** 1) $-2(1-i)$; 2) $2(1-i)$; 3) $-2(1+i)$; 4) -4; 5) $4i$. **394.** 1) $2\pi i$; 2) -2π; 3) $2\pi Ri$; 4) $2\pi Ri$. **395.** 1) $\frac{2\pi i}{n+1}$, si $n \neq -1$; $-2\pi^2$, si $n=-1$; 2) $(-1)^{n+1}\frac{2\pi i}{n+1}$, si $n \neq -1$; $-2\pi^2$, si $n=-1$. **396.** $\frac{e^{2\pi\alpha i}-1}{1+\alpha}$, si $\alpha \neq -1$; $2\pi i$, si $\alpha=-1$. **398.** 1) $|\alpha| \leqslant \frac{\pi}{2}$; 2) $\operatorname{sen} p\alpha \geqslant 0$. **412.** 1) $\frac{\pi}{3}$; 2) $-\frac{\pi}{3}$; 3) 0. **413.** Si el contorno C contiene en su interior el punto 0 y no contiene ni 1 ni -1, se tiene $I=-2\pi i$; si contiene sólo uno de los puntos -1 ó 1 y no contiene el punto 0, se tiene $I=\pi i$. De aquí se desprende que la integral puede tomar cinco valores diferentes ($-2\pi i$; $-\pi i$; 0; πi; $2\pi i$). **414.** 2^n-1 para $n>1$ y 2 para $n=1$. **415.** $\frac{\pi i}{2}$. **416.** $\frac{\operatorname{sen} a}{a}$. **417.** $e^a\left(1+\frac{a}{2}\right)$. **418.** 1) 1; 2) $-\frac{e}{2}$; 3) $1-\frac{e}{2}$. **420.** 1) $\frac{2}{3}$; 2) $1-\frac{2i}{3}$. **425.** $R=1$. **426.** ∞. **427.** 0. **428.** 2. **429.** e. **430.** 1. **431.** 1. **432.** 1. **433.** $\frac{1}{4}$. **434.** $\frac{1}{e}$. **435.** 1

para $|a| \leq 1$ y $\frac{1}{|a|}$ para $|a| > 1$. 436. 1. 437. 1) R; 2) $\frac{R}{2}$; 3) ∞; 4) 0; 5) R^k; 6) R para $|z_0| \leq 1$ y $\frac{R}{|z_0|}$ para $|z_0| > 1$. 438. 1) $R \geq \min(r_1, r_2)$; 2) $R \geq r_1 r_2$; 3) $R \leq \frac{r_1}{r_2}$. 439. 1) $\frac{z}{(1-z)^2}$; 2) $-\ln(1-z)$; 3) $\frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z}$; 4) $\ln(1+z)$. 440. Diverge en todos los puntos. 441. Converge (no absolutamente) en todos los puntos, a excepción de $z=1$. 442. Converge absolutamente. 443. Converge (no absolutamente) en todos los puntos, a excepción de $z=-1$. 444. Converge (no absolutamente) en todos los puntos, a excepción de los puntos $z=e^{\frac{2k\pi i}{p}}$ $(k=0, 1, \ldots, p-1)$. 445. Converge (no absolutamente) en todos los puntos, a excepción de los puntos $z=\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ y $z=-1$. 446. Converge absolutamente. 447. Por ejemplo, $c_n=(-1)^n$. 449. *Solución*. Investiguemos primero la convergencia en el punto $z=1$. Los términos de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$, cuyos denominadores son k^2, k^2+1, $\ldots$, $(k+1)^2-1$ llevan el signo $(-1)^k$; denotemos mediante $(-1)^k\sigma_k$ la suma de estos términos y demostremos que $\sigma_k \to 0$ monótonamente. Tenemos $0<\sigma_k<\frac{(k+1)^2-k^2}{k^2}=\frac{2k+1}{k^2}\to 0$ para $k\to\infty$. Además, la diferencia

$$\sigma_k-\sigma_{k+1}=\left[\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right]+\left[\frac{1}{k^2+1}-\frac{1}{(k+1)^2+1}\right]+\ldots$$
$$\ldots+\left[\frac{1}{(k+1)^2-1}-\frac{1}{(k+2)^2-3}\right]-\frac{1}{(k+2)^2-2}-\frac{1}{(k+2)^2-1}>$$
$$>(2k+1)\left[\frac{1}{(k+1)^2-1}-\frac{1}{(k+2)^2-3}\right]-\frac{1}{(k+2)^2-2}-\frac{1}{(k+2)^2-1}>0.$$

Con esto queda demostrado que la serie dada converge para $z=1$. Si $|z|=1$, pero $z\neq 1$, nos valemos, según la indicación, del criterio de convergencia del problema 90, tomando $a_n=(-1)^{[\sqrt{n}]}z^n$, $b_n=\frac{1}{n}$. Las dos primeras condiciones se verifican obviamente; para demostrar la tercera estimamos S_n. $S_n=-z-z^2-z^3+z^4+\ldots+(-1)^{[\sqrt{n}]}z^n=-z\frac{1-z^3}{1-z}+$ $+z^4\frac{1-z^5}{1-z}-z^9\frac{1-z^7}{1-z}+\ldots\pm z^{p^2}\frac{1-z^{2p+1}}{1-z}\mp(z^{(p+1)^2}+\ldots+z^n)$, donde $p=[\sqrt{n}]-1$. De aquí $|S_n|<\frac{2p}{|1-z|}+2p+3$ y, por consiguiente, para todo z existe un k tal que $|S_n|<kp<k\sqrt{n}$, con lo cual concluye la demostración. 452. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $R=\infty$. 453. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $R=\infty$. 454. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}z^{2n}}{(2n)!}$, $R=\infty$. 455. $\frac{1}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n-1}z^{2n}}{(2n)!}$, $R=\infty$. 456. $a^{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}\left(\frac{z}{a}\right)^n$, donde $\binom{\alpha}{0}=1$, $\binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}$ $(n=1, 2, \ldots)$; $R=|a|$.

457. $\frac{1+i}{\sqrt{2}}\left[1+\frac{1}{2}\frac{z}{i}+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1\cdot3\ldots(2n-3)}{2\cdot4\ldots2n}\left(\frac{z}{i}\right)^n\right]$, $R=1$.

458. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{a^nz^n}{b^{n+1}}$, $R=\left|\frac{b}{a}\right|$. 459. $\frac{i}{6}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2-3i)^n\,(2+3i)^n}{13^n}z^n=\sum_{n=1}^{\infty}c_nz^n$,

donde $c_n=\sum_{m=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}(-1)^m\binom{n}{2m+1}2^{n-2m-1}3^{2m}$, $R=\sqrt{13}$.

460. $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n(n-1)z^n$, $R=1$. 461. $2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{2n+1}$, $R=1$.

462. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{2n+1}$, $R=1$. 463. $z+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot3\ldots(2n-1)}{2^n\cdot n!\,(2n+1)}z^{2n+1}$, $R=1$.

464. $\ln 2-\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\frac{z^n}{n}$, $R=1$. 465. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{n!\,(2n+1)}$, $R=\infty$.

466. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!\,(2n+1)}$, $R=\infty$. 467. $\frac{1}{3}+2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(z-1)^n}{3^{n+1}}$,

$R=3$. 468. $\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n}}[(z-1)^{2n}+(z-1)^{2n+1}]$, $R=2$. 469. $\frac{1}{4}+$

$+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n-3)(z-1)^n}{2^{n+2}}$, $R=2$. 470. $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{3}}{n}(z-1)^n$, $R=1$.

471. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(z-1)^n}{n}$, $R=1$. 472. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\left(1+\frac{n\pi}{2}\right)}{n!}(z-1)^{2n}$, $R=\infty$.

473. $1+z^2+\frac{z^4}{3}+\ldots$ 474. $1-\frac{z^2}{4}-\frac{z^4}{96}+\ldots$ 475. $1+z^2-\frac{1}{2}z^3+\frac{5}{6}z^4-$
$-\frac{3}{4}z^5+\ldots$ 476. $1+z+z^2+\frac{5}{6}z^3-\frac{5}{8}z^4+\frac{13}{30}z^5+\ldots$ 477. $z+\frac{z^2}{2!}+\frac{2z^3}{3!}+$

$+\frac{9z^5}{5!}+\ldots$ 478. $\ln 2+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{8}-\frac{z^4}{192}+\ldots=\ln 2+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}z^{n+1}$; $c_0=\frac{1}{2}$,
$c_0=nc_1+n(n-1)c_2+\ldots+n!\,c_{n-1}+2n!\,c_n-1$, $n\geq 1$.
479. $2\left[\frac{z^2}{2}+\left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{z^3}{3}+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\frac{z^4}{4}+\ldots+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\right.\right.$
$\left.\left.\ldots+\frac{1}{n-1}\right)\frac{z^n}{n}+\ldots\right]$. 480. $-4\pi^2+2\left[-2\pi iz+(1-2\pi i)\frac{z^2}{2}+\right.$
$\left.+\left(1+\frac{1}{2}-2\pi i\right)\frac{z^3}{3}+\ldots+\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n-1}-2\pi i\right)\frac{z^n}{n}+\ldots\right]$.
481. $z^2-\left(1+\frac{1}{3}\right)\frac{z^4}{2}+\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)\frac{z^6}{3}-\ldots+(-1)^{n+1}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots\right.$
$\left.\ldots+\frac{1}{2n-1}\right)\frac{z^{2n}}{n}+\ldots]$. 482. $2\left[\left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{z^3}{3}-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\frac{z^5}{5}+\ldots\right.$

$\ldots+(-1)^{n+1}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)\frac{z^{2n+1}}{2n+1}+\ldots\Big]$. **483.** $1+$
$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\binom{n-1}{k-1}\right]z^n$. **487.** $1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{2^{2k}B_{2k}z^{2k}}{(2k)!}$, $R=\pi$.

488. 1) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{2^{2k}B_{2k}}{2k(2k)!}z^{2k}$, $R=\pi$; 2) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{2^{2k}(2^{2k}-1)B_{2k}}{(2k)!}z^{2k-1}$, $R=\frac{\pi}{2}$;

3) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{2^{2k}(2^{2k}-1)B_{2k}}{2k(2k)!}z^{2k}$, $R=\frac{\pi}{2}$; 4) $1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{(2^{2k}-2)B_{2k}}{(2k)!}z^{2k}$,

$R=\pi$. **489.** $c_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$, $n\geqslant 0$, $R=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

490. $c_0=\frac{A}{\alpha}$, $c_1=\frac{\alpha B-\beta A}{\alpha^2}$, $c_2=\frac{\alpha^2C-\alpha\beta B+(\beta^2-\alpha\gamma)A}{\alpha^3}$; $\alpha c_n+\beta c_{n-1}+$
$+\gamma c_{n-2}+\delta c_{n-3}=0$ $(n=3, 4, \ldots)$. **496.** $\frac{e^{-\frac{zt}{1-t}}}{1-t}$; $L_{n+1}(z)-(2n+1-z)L_n(z)+$
$+n^2L_{n-1}(z)=0\,(n\geqslant 1)$. **497.** $z+z^3+\frac{z^5}{4\cdot 5}+\frac{z^9}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9}+\frac{z^{4n+1}}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\ldots 4n(4n+1)}+\ldots$;
$|z|<\infty$. **498.** $z-\frac{n(n+1)-1\cdot 2}{3!}z^3+\frac{[n(n+1)-1\cdot 2][n(n+1)-3\cdot 4]}{5!}z^5+\ldots$
$\ldots+\frac{[n(n+1)-1\cdot 2][n(n+1)-3\cdot 4]\ldots[n(n+1)-(2k-1)2k]}{(2k+1)!}z^{2k+1}+\ldots$;
$|z|<1$. **499.** $\frac{z}{1-z^2}$. **500.** $1-\frac{m^2}{2!}z^2+\frac{m^2(m^2-2^2)}{4!}z^4-\ldots$
$\ldots+(-1)^m\frac{m^2(m^2-2^2)\ldots[m^2-(2n-2)^2]}{(2n)!}z^{2n}+\ldots$ **501.** $w=F(a, b, c, z)=1+$
$+\frac{ab}{1\cdot c}z+\frac{a(a+1)b(b+1)}{2!\,c(c+1)}z^2+\ldots+\frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)b(b+1)\ldots(b+n-1)}{n!\,c(c+1)\ldots(c+n-1)}z^n$;
$|z|<1$. **503.** *Solución*. Derivando la ecuación hipergeométrica, obtenemos la ecuación

$$z(1-z)\frac{d^2\zeta}{dz^2}+[(c+1)-(a+b+3)z]\frac{d\zeta}{dz}-(a+1)(b+1)\zeta=0, \qquad (1)$$

a la cual satisface la función $\zeta=\frac{d}{dz}F(a, b, c, z)$. Como la función $\frac{d}{dz}F(a, b, c, z)$, por ser derivada de la función $F(a, b, c, z)$ analítica en el punto $z=0$ también es una función analítica en el punto $z=0$ y como toda solución de la ecuación (1) analítica en el punto $z=0$ deba ser de la forma $kF(a+1, b+1, c+1, z)$ (véase el problema. 501), donde k es una constante, obtenemos que $\frac{d}{dz}F(a, b, c, z)=kF(a+1, b+1, c+1, z)$. Tomando $z=0$, encontramos $k=\frac{ab}{c}$. **505.** 1) 4; 2) 15; 3) 3. **506.** 1) Un cero de orden $k+l$; 2) un cero de orden no menor de min (k, l); 3) un cero de orden $k-l$, si $k>l$; un punto regular, que no es un cero, si $k=l$, y un punto singular, si $k<l$. **507.** Los puntos $z=\pm 3i$ son ceros de primer orden. **508.** Los puntos $z=\pm 3i$ son ceros de primer orden; el punto infinito es un cero de segundo orden. **509.** $z=0$ es un cero de segundo orden; $z=k\pi$ $(k=\pm 1, \pm 2, \ldots)$ son ceros de primer orden. **510.** $z=\pm 2$

son ceros de tercer orden; $z=2k\pi i$ $(k=0, \pm 1, \pm 2...)$ son ceros de primer orden. **511.** $z=2k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2...)$ son ceros de segundo orden. **512.** $z=\pm\pi$ son ceros de tercer orden; todos los demás puntos de tipo $z=k\pi$ $(k=0, \pm 2, \pm 3, \ldots)$ son ceros de primer orden. **513.** $z=\frac{\pi}{4}+k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ son ceros de primer orden. **514.** No tienen ceros. **515.** $z=k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ son ceros de tercer orden. **516.** $z=0$ es un cero de segundo orden; $z=k\pi$ $(k=\pm 1, \pm 2, \ldots)$ son ceros de tercer orden. **517.** $z=0$ es un cero de tercer orden; $z=\sqrt[3]{k\pi}$ y $z=\frac{1}{2}\sqrt[3]{k\pi}\,(1\pm i\sqrt{3})$ $(k=\pm 1, \pm 2...)$ son ceros de primer orden. **518.** $z=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ son ceros de tercer orden. **519.** $z=\frac{1}{2}\sqrt[3]{(2k+1)\frac{\pi}{2}}$ y $z=\sqrt{(2k+1)\frac{\pi}{2}}\;(1\pm i\sqrt{3})$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ son ceros de primer orden. **520.** $z=4$ es un cero de tercer orden para una de las ramas. **521.** Aquí hay dos funciones dadas; una tiene ceros de segundo orden en los puntos $z=2k\pi\pm\frac{\pi}{6}$ y la otra tiene ceros de segundo orden en los puntos $z=(2k+1)\pi\pm\frac{\pi}{6}$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. **522.** El punto de acumulación puede ser sólo el punto infinito. **523.** 1), 2) y 3) No existe; 4) existe $\left(f(z)=\frac{1}{z+1}\right)$. **524.** 1) Existe $(f(z)=z^2)$; 2) no existe. **525.** No contradice ya que el punto $z=1$ no pertenece al recinto de analiticidad de la función. **526.** *Solución.* Del desarrollo $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ se despende que $u(x, y)=\frac{c_0+\bar{c}_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\{c_n[(x-x_0)+i(y-y_0)]^n+\bar{c}_n[(x-x_0)-i(y-y_0)]^n\}$. Tomando aquí $x=x_0+\frac{\zeta-z_0}{2}$ e $y=y_0+\frac{\zeta-z_0}{2i}$, donde ζ es lo suficientemente próximo a z, obtenemos (¡establezca esto!)

$$u\left(x_0+\frac{\zeta-z_0}{2},\; y_0+\frac{\zeta-z_0}{2i}\right)=\frac{1}{2}\,[\bar{c}_0+f(\zeta)]$$

y tomando z en lugar de ζ, llegamos a la igualdad requerida. **528.** z^2+2+Ci. **529.** $ze^z-\frac{i}{z}+Ci$. **530.** $(1+i)z-3i+C$. **531.** $\operatorname{sen} z-\operatorname{ch} z+C$ (C es una constante real arbitraria). **538.** 2) $2\pi^2 M$.

Capítulo IV

543. $-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n$ para $|z|<2$; $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}$ para $|z|>2$.

544. $\frac{(-1)^k}{a^k}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k-1}\left(\frac{z}{a}\right)^n$ para $|z|<|a|$; $\frac{1}{z^k}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k-1}\left(\frac{a}{z}\right)^n$ para $|z|>|a|$. **545.** $\frac{i}{z}+\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ para $|z|<1$; $-\frac{1}{z-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n$

para $0<|z-1|<1$; $-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{z^n}$ para $|z|>1$. **546.** $\frac{1}{b-a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{a^{n+1}b^{n+1}}z^n$ para $|z|<|a|$; $\frac{1}{a-b}\left[\frac{1}{z-a}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(b-a)^{n+1}}\right]$ para $0<|z-a|<|b-a|$; $\frac{1}{b-a}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{b^{n-1}-a^{n-1}}{z^n}$ para $|z|>|b|$; $\frac{1}{a-b}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^n}{b^{n+1}}+\frac{a^n}{z^{n+1}}\right)$ para $|a|<|z|<|b|$. **547.** $\frac{1}{z-2}+i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2+i)^{n+1}-(2-i)^{n+1}}{5^{n+1}}(z-2)^n$ para $0<|z-2|<\sqrt{5}$; $2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{2n}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$ para $1<|z|<2$.

548. $-\frac{i}{4(z-i)}-\frac{1}{4(z-i)^2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+3)\,i^n(z-i)^n}{2^{n+4}}$ para $0<|z-i|<2$; $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{z^{2n+2}}$ para $|z|>1$. **549.** $\pm\left[z-\frac{1}{2}(a+b)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{z^n}\right]$ para $|z|>|b|$, donde $c_{-(n-1)}=(-1)^n\left[\binom{\frac{1}{2}}{n}b^n+\binom{\frac{1}{2}}{n-1}\binom{\frac{1}{2}}{1}b^{n-1}a+\binom{\frac{1}{2}}{n-2}\times\binom{\frac{1}{2}}{2}b^{n-2}a^2+\dots+\binom{\frac{1}{2}}{n}a^n\right]$. **550.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$, $c_{-n}=\frac{(-1)^n i}{\sqrt{2}}\times\left[\binom{-\frac{1}{2}}{n}+\sum_{m=1}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n+m}\binom{-\frac{1}{2}}{m}2^{-m}\right]$, $c_n=2^{-n}c_{-n}$ $(n=1,\ 2,\ \dots)$, $c_0=\frac{i}{\sqrt{2}}\left[1+\sum_{m=1}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{m}^2 2^{-m}\right]$. **551.** $\frac{1}{2}+z+z^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)!\,z^n}$ para $0<|z|<\infty$. **552.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!\,(z-1)^n}$ para $0<|z-1|<\infty$; $1-\frac{1}{z}+\sum_{n=2}^{\infty}c_{-n}z^{-n}$ para $|z|>1$, donde $c_{-n}=-1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!}\binom{n-1}{k}$ $(n=2,\ 3,\ \dots)$. **553.** $\cos 1+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{k-1}4^{2k-1}\operatorname{sen}1}{(2k-1)!\,(z-2)^{4k-2}}+\frac{(-1)^k4^{2k}\cos 1}{(2k)!\,(z-2)^{4k}}\right]$ para $0<|z-2|<\infty$. **554.** $(z-1)+2+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{k-1}\left[\frac{1}{(2k-1)!}-\frac{1}{(2k+1)!}\right]}{(z-1)^{2k-1}}+\frac{2(-1)^k}{(2k+1)!\,(z-1)^{2k}}\right]$ para $0<|z-1|<\infty$. **555.** $\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n+\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}z^{-n}$, don

de $c_n = c_{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\,(n+k)}$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$. **556.** $\sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} z^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_{-2n} z^{-2n}$,

donde $c_{2n} = c_{-2n} = (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!\,(2n+2k+1)!}$ $(n=0, 1, 2 \ldots)$.

557. $-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(1+\frac{n\pi}{2}\right)}{n!\,(z-1)^n}$ para $0 < |z-1| < \infty$; $-\operatorname{sen} 1 - \frac{\cos 1}{z} + \frac{\operatorname{sen} 1 - 2\cos 1}{2!\,z^2} + \frac{6 \operatorname{sen} 1 - 5 \cos 1}{3!\,z^3} + \ldots$ para $|z| > 1$. **558.** $\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} z^{2n-1}$, donde B_{2n} son los números de Bernoulli (véase el problema 485) para $0 < |z| < 2\pi$; $\frac{3}{z} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^{2n}}{z^{2n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} + \frac{2}{\pi^{2n}}\right] z^{2n-1}$ para $\pi < |z| < 2\pi$.

559. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^n - a^n}{n z^n}$ para $|z| > \max(|a|, |b|)$. **560.** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n}$, donde $c_{-2k} = -i \times \left(2^{2k-1} - \frac{2^{2k-3}}{3} + \frac{2^{2k-5}}{5} - \ldots + (-1)^{k+1} \frac{2}{2k-1}\right)$, $c_{-(2k+1)} = 2c_{-2k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, para $|z| > 2$; $i \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n}$ donde $c_{-1} = 2i \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$, $c_{-2k} = 2^{2k} i \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{2} - \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(-1)^m}{(2m+1)\,2^{2m+1}}\right)$, $c_{-(2k+1)} = 2c_{-2k}$ $(k=1, 2, \ldots)$, para $1 < |z| < 2$. **561.** 1) Sí; 2) sí; 3) no (el punto $z=1$ no es un punto singular aislado); 4) no; 5) no; 6) no; 7) no; 8) no (la función no es continua en cualquier anillo que rodea al punto $z=0$); 9) no; 10) sí; 11) sí, cuando α es un número entero o cero, y no en todos los demás casos. **562.** 1) No; 2) sí, ambas ramas admiten el desarrollo; 3) no; 4) sí, las tres ramas admiten el desarrollo; 5) no; 6) dos ramas admiten el desarrollo (de las cuatro), determinadas por las condiciones $\sqrt{1+\sqrt{1}} = \pm\sqrt{2}$; 7) no; 8) no; 9) no; 10) sí, las seis ramas admiten el desarrollo; 11) no; 12), 13) y 14) sí, cualquier rama admite el desarrollo; 15) no; 16) no; 17) el desarrollo lo admiten todas las ramas, a excepción de dos determinadas por el valor $\operatorname{Arcsen} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$.
565. $z=0$ y $z=\pm 1$ son polos de primer orden; $z=\infty$ es un punto regular (un cero de tercer orden). **566.** $z = \frac{1 \pm i}{\sqrt{2}}$ y $z = \frac{-1 \pm i}{\sqrt{2}}$ son polos de primer orden; $z=\infty$ es un punto regular. **567.** $z=1$ es un polo de segundo orden; $z=\infty$ es un polo de tercer orden. **568.** $z=0$ es un polo de primer orden; $z=\pm 2i$ son polos de segundo orden; $z=\infty$ es un punto regular (un cero de quinto orden). **569.** $z=\pm i$ son polos de primer orden; $z=\infty$ es un punto singular esencial. **570.** $z=\infty$ es un punto singular esencial. **571.** $z=\infty$ es un punto singular esencial. **572.** $z=2k\pi i$ $(k=\pm 1, \pm 2, \ldots)$ son polos de primer orden; $z=\infty$ es un punto de acumulación de los polos. **573.** $z=0$ es un polo de segundo orden; $z=2k\pi i$ $(k=\pm 1, \pm 2, \ldots)$ son polos de primer orden; $z=\infty$ es el punto de acumulación de los polos. **574.** $z=(2k+1)\pi i$ $(k=0, \pm 1, \pm 2 \ldots)$ son polos de primer orden; $z=\infty$ es el punto de acumulación de los polos. **575.** $z=0$ es un polo de tercer orden; $z=2k\pi \pm i \ln(2+\sqrt{3})$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

son polos de primer orden; $z=\infty$ es el punto de acumulación de los polos. **576.** $z=k\pi i$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) son polos de primer orden; $z=\infty$ es el punto de acumulación de los polos. **577.** $z=0$ es un punto singular esencial; $z=\infty$ es un punto regular. **578.** $z=0$ es un punto singular esencial; $z=\infty$ es un polo de primer orden. **579.** $z=1$ es un punto singular esencial; $z=\infty$ es un punto regular. **580.** $z=0$ es un punto singular esencial; $z=\infty$ es un punto singular esencial. **581.** $z=1$ es un punto singular esencial; $z=2k\pi i$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) son polos de primer orden; $z=\infty$ es el punto de acumulación de los polos. **582.** $z=k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) son polos de primer orden; $z=\infty$ es un punto de acumulación de los polos. **583.** $z=0$ es un polo de segundo orden; $z=\infty$ es un punto singular esencial. **584.** $2=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) son polos de primer orden; $z=\infty$ es el punto de acumulación de los polos. **585.** $z=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) son polos de segundo orden; $z=\infty$ es el punto de acumulación de los polos. **586.** $z=0$ es un polo de tercer orden; $z=k\pi$ ($k=\pm 1, \pm 2, \ldots$), son polos de primer orden; $z=\infty$ es el punto de acumulación de los polos. **587.** $z=k\pi$ ($k=\pm 1, \pm 2, \ldots$) son los polos de primer orden; $z=\infty$ es el punto de acumulación de los polos. **588.** $z=k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) son los polos de primer orden; $z=\infty$ es el punto de acumulación de los polos. **589.** Si $a \neq m\pi+\frac{\pi}{2}$ ($m=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), los puntos $z=2k\pi+a$ y $z=(2k+1)\pi-a$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) son polos simples; si $a=m\pi+\frac{\pi}{2}$, los puntos $z=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ para m par y los puntos $z=$ $=(2k+1)\pi=\frac{\pi}{2}$ para m impar son polos de segundo orden; $z=\infty$ es en todos los casos el punto de acumulación de los polos. **590.** Si $a \neq m\pi$ ($m=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), los puntos $z=(2k+1)\pi \pm a$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) son polos de primer orden; si $a=m\pi$, los puntos $z=2k\pi$ para m impar y los puntos $z=(2k+1)\pi$ para m par son polos de segundo orden; $z=\infty$ en todos los casos es el punto de acumulación de los polos. **591.** $z=1$ es un punto singular esencial; $z=\infty$ es un punto regular (un cero de primer orden). **592.** $z=-2$ es un polo de segundo orden; $z=2$ es un punto singular esencial; $z=\infty$ es un polo de tercer orden. **593** y **594.** $z=\frac{1}{k\pi}$ ($k=\pm 1, \pm 2, \ldots$) son polos de primer orden; $z=0$ es el punto de acumulación de los polos; $z=\infty$ es un polo de primer orden. **595.** $z=0$ es un punto singular esencial; $z=\infty$ es un punto regular (un cero de primer orben). **596.** $z=0$ es un punto singular esencial; $z=\infty$ es un punto singular esencial. **597.** $z=$ $=\frac{1}{k\pi}$ ($k=\pm 1, \pm 2, \ldots$) son puntos singulares esenciales; $z=0$ es el punto de acumulación de los puntos singulares esenciales; $z=\infty$ es un punto singular esencial. **598.** $z=\frac{2}{(2k+1)\pi}$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) son puntos singulares esenciales; $z=0$ es el punto de acumulación de los puntos singulares esenciales; $z=\infty$ es un punto regular. **599.** $z=\frac{1}{k\pi}$ ($k=\pm 1, \pm 2, \ldots$) son puntos singulares esenciales; $z=0$ es el punto de acumulación de los puntos singulares esenciales; $z=\infty$ es un punto singular esencial. **600.** $z=\frac{2}{(2k+1)\pi}$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) son puntos singulares esenciales; $z=0$ es el punto de acumulación de los puntos singulares esenciales; $z=\infty$ es un punto regular. **601.** Para una de las ramas es un punto regular y para la otra es un polo de primer orden. **602.** Para una de las ramas es un polo de primer orden y para las cinco ramas restantes, un punto regular. **603.** Para una de las ramas es un punto regular y para la otra, un polo de segundo orden. **604.** Para una de las ramas es un punto

regular y para la otra, un punto singular esencial. **605.** Un polo de primer orden para ambas ramas. **606.** $z = \left(1+\frac{1}{k\pi}\right)^2$ es un punto regular para una de las ramas y un polo de primer orden para la otra; $z=1$ es un punto regular para una de las ramas y un punto singular no aislado, que es el punto de acumulación de los polos, para la otra rama. **607.** Cada uno de los puntos dados es un punto regular para una de las ramas y un polo de primer orden para la otra. **608.** Un punto regular para una de las ramas y un punto singular esencial para la otra. **609.** 1) Un polo de primer orden para todas las ramas; 2) un punto regular para un conjunto infinito de ramas y un polo de primer orden para el otro conjunto infinito de ramas. **610.** Un punto regular para un conjunto infinito de ramas y un punto singular esencial para el otro conjunto infinito de ramas. **611.** 1) El punto $z=\infty$ es un polo de orden $k = \text{máx}(n, m)$, si $n \neq m$; en cambio, si $n=m$, el punto $z=\infty$ o bien es un polo de orden $k \leqslant n$ o bien un punto regular; 2) un polo de orden $n-m$, si $n > m$, y un punto regular, si $n \leqslant m$; si $n < m$, el punto $z=\infty$ es un cero de orden $m-n$; 3) un polo de orden $n+m$. **613.** Ejemplos: 1) z^2; 2) $\frac{1}{z^2}+z$; 3) $\frac{1}{z^n-1}$.

614. 1) $\frac{a}{z-\alpha}$ $(a \neq 0)$ o $az+b$ $(a \neq 0)$; 2) $\frac{a}{(z-\alpha)^n}$ $(a \neq 0)$ o $a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n$ $(a_n \neq 0)$; 3) $\frac{1}{z^2}+C$; 4) $\frac{a_0+a_1z+\ldots+a_{n+m}z^{n+m}}{z^n}$ $(a_0 \neq 0,\ a_{n+m} \neq 0)$;

5) $\frac{a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n}{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_n)}$ $(\alpha_k \neq \alpha_l)$ para $k \neq l$ y al menos uno de los números a_m es diferente de cero) o $\frac{a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n}{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_{n-1})}$ $(a_n \neq 0,\ \alpha_k \neq \alpha_l$ para $k \neq l)$. **616.** 1) z_0 es un punto singular evitable; 2) z_0 es un polo de orben n, si $\varphi(z)$ es univalente en una vecindad del punto z_0, y un polo de orden nm, si $\varphi(z)$ es m—valente en una vecindad de este punto; 3) z_0 es un punto singular esencial. **617.** 1) El punto z_0^* es un polo de orden n, si γ' es un segmento rectilíneo, y un punto regular de multiplicidad n, si γ' es un arco circular, es decir, $f(z)-f(z_0^*)=(z-z_0^*)^n\varphi(z)$, donde $\varphi(z)$ es analítica en una vecindad del punto z_0^* y $\varphi(z_0^*) \neq 0$. Si $z_0^*=\infty$, esta condición se escribe en la forma $f(z)-f(\infty)=z^{-n}\varphi(z)$, donde $\varphi(z)$ es analítica en el ∞ y $\varphi(\infty) \neq 0$; 2) z_0^* es un punto singular esencial. **619.** 1) -1; 2) 0; 3) 0; 4) 0. **620.** 1) El punto singular esencial es $z=\infty$; el valor excepcional es 0 (¡y el ∞!) $e^z \to 0$, si $x \to -\infty$ ($e^z \to \infty$, si $x \to +\infty$); 2) el punto esencial es $z=0$; el valor excepcional es 0 (y el ∞); $e^{\frac{1}{z}} \to 0$, si $z \to 0$, por ejemplo, a lo largo del camino $y=0$, $x<0$ $\left(e^{\frac{1}{z}} \to \infty\right.$, si $z \to 0$ a lo largo del camino $y=0$, $\left.x>0\right)$; 3) el punto singular esencial es $z=0$; no hay valores excepcionales (salvo el valor ∞); $\cos\frac{1}{z} \to \infty$ para $x=0$, $y \to 0$; 4) el punto singular esencial es $z=\infty$; los valores excepcionales son i y $-i$. **621.** $\text{res}\,[f(z)]_{z=\pm 1} = -\frac{1}{2}$; $\text{res}\,[f(z)]_{z=0}=1$; $\text{res}\,[f(z)]_{z=\infty}=0$. **622.** $\text{res}\,[f(z)]_{z=i} = -\frac{i}{4}$; $\text{res}\,[f(z)]_{z=-i}=\frac{i}{4}$; $\text{res}\,[f(z)]_{z=\infty}=0$. **623.** $\text{res}\,[f(z)]_{z=-1}=(-1)^{n+1}\frac{(2n)!}{(n-1)!\,(n+1)!}$; $\text{res}\,[f(z)]_{z=\infty}=(-1)^n\frac{(2n)!}{(n-1)!\,(n+1)!}$. **624.** $\text{res}\,[f(z)]_{z=0}=1$; $\text{res}\,[f(z)]_{z=\pm 1}=$

$= -\frac{1}{2}$; res $[f(z)]_{z=\infty}=0$. **625.** res $[f(z)]_{z=0}=0$; res $[f(z)]_{z=i}=i$; res $[f(z)]_{z=\infty}=-i$. **626.** res $[f(z)]_{z=-1}=2\,\text{sen}\,2$; res $[f(z)]_{z=\infty}=-2\,\text{sen}\,2$. **627.** res $[f(z)]_{z=0}=\frac{1}{9}$; res $[f(z)]_{z=3i}=-\frac{1}{54}(\text{sen}\,3-i\cos 3)$; res $[f(z)]_{z=-3i}=-\frac{1}{54}(\text{sen}\,3+i\cos 3)$; res $[f(z)]_{z=\infty}=\frac{1}{27}(\text{sen}\,3-3)$. **628.** res $[f(z)]_{z=\frac{2k+1}{2}\pi}=-1$ $(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$. **629.** res $[f(z)]_{z=k\pi}=(-1)^k$ $(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$. **630.** res $[f(z)]_{z=k\pi}=0$ $(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$. **631.** res $[f(z)]_{z=k\pi}=-1$ $(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$. **632.** 1) res $[f(z)]_{z=2}=$ res $[f(z)]_{z=\infty}=0$; 2) res $[f(z)]_{z=2}=-$res $[f(z)]_{z=\infty}=-\frac{143}{24}$. **633.** res $[f(z)]_{z=0}=$

$$= -\text{res}\,[f(z)]_{z=\infty}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\,(n+1)!}.$$

634. res $[f(z)]_{z=0}=$ res $[f(z)]_{z=\infty}=0$. **635.** res $[f(z)]_{z=-1}=-$res $[f(z)]_{z=\infty}=-\cos 1$. **636.** res $[f(z)]_{z=-3}=$

$$= -\text{res}\,[f(z)]_{z=\infty}=-\text{sen}\,2\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{2n}}{(2n-1)!\,(2n)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^{2n+1}}{(2n)!\,(2n+1)!}\right].$$

637. res $[f(z)]_{z=0}=\frac{i}{2}$; res $[f(z)]_{z=\frac{2k\pi i}{n}}=\frac{1}{2k\pi i}$ $(k=\pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$. **638.** res $[f(z)]_{z=0}=0$ si $n<0$, y también, si $n>0$ y es impar; res $[f(z)]_{z=0}=\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{(n+1)!}$, si $n=0$ ó $n>0$ pero es par; res $[f(z)]_{z=\infty}=-$res $[f(z)]_{z=0}$. **639.** res $[f(z)]_{z=\frac{1}{k\pi}}=(-1)^{k+1}\frac{1}{k^2\pi^2}$ $(k=\pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$; res $[f(z)]_{z=\infty}=$

$$=\frac{2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}=-\frac{1}{6}.$$

640. res $[f(z)]_{z=k^2\pi^2}=(-1)^k\,2k^2\pi^2$ $(k=1,\ 2,\ \ldots)$.

641. res $[f(z)]_{z=0}=0$, si n es impar, res $[f(z)]_{z=0}=(-1)^{k+1}\frac{2^{2k}(2^{2k}-1)}{(2k)!}B_{2k}$, si $n=2k$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$, donde B_{2k} son los números de Bernoulli (véase el problema 485); res $[f(z)]_{z=\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}=-\frac{1}{\left(k+\frac{1}{2}\right)^n\pi^n}$ $(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$.

642. 1; -1. **643.** 0; 2. **644.** $-2e^{2k\pi ai}$, si $\sqrt{1}=1$ y Ln $1=2k\pi i$; 0 para las ramas definidas por el valor $\sqrt{1}=-1$. **645.** $\pm\frac{(a-b)^2}{8}$. **646.** 1) $\alpha-\beta$ (para todas las ramas); 2) $e^{\alpha}-e^{\beta}$ (para todas las ramas). **647.** 1) $2k\pi i+\frac{1}{2\cdot 3!}-\frac{1}{4\cdot 5!}+\ldots$, si Ln $1=2k\pi i$; 2) $-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3\cdot 4!}-\frac{1}{5\cdot 6!}+\ldots$ (para todas las ramas). **648.** res $[f(z)]_{z=0}=k\pi$, si Arctg $0=k\pi$; res $[f(z)]_{z=\infty}=-\frac{(2k+1)\pi}{2}$, si Arctg $\infty=\frac{(2k+1)\pi}{2}$. **649.** res $[f(z)]_{z=0}=0$, *si* $n\geqslant 0$; res $[f(z)]_{z=0}=\text{Ln}\frac{\alpha}{\beta}$, si $n=-1$, y res $[f(z)]_{z=0}=\frac{1}{n+1}(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})$, si $n\leqslant -2$; res $[f(z)]_{z=\infty}=\frac{1}{n+1}(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})$, si $n\geqslant 0$; res $[f(z)]_{z=\infty}=-2k\pi i$, si $n=-1$ y Ln $1=2k\pi i$, y res $[f(z)]_{z=\infty}=0$, si $n\leqslant -2$. **650.** $-2c_0c_1$.

651. 1) $A\varphi(a)$; 2) $c_{-1}\varphi(a)+\frac{c_{-2}\varphi'(a)}{1!}+\ldots+\frac{c_{-k}\varphi^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}$. 652. 1) n; 2) $-n$.

653. 1) $n\varphi(a)$; 2) $-n\varphi(a)$. 654. $\frac{A}{\varphi'(a)}$. 655. AB.

656. $\sum_{n=1}^{k}(-1)^n\frac{n\bar{c}_{-n}(\beta^*-a)^{n+1}}{R^{2n}}$. 657. $-\frac{\pi i}{\sqrt{2}}$. 658. $-2\pi i$. 659. $-\frac{\pi i}{121}$.

660. πi. 661. $-\frac{2\pi i}{9}$. 562. 1. 563. 0. 664. $\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$, si $n\geqslant -1$, y 0, si $n<-1$. 665. $32\pi i$. 666. 0. 667. $\frac{f(0)}{g(0)}+\sum_{k=1}^{n}\frac{f(a_k)}{a_k g'(a_k)}$. 669. 0, si $r<1$; ± 1, si $r>1$ (el signo depende de cómo se escoja la rama del integrando). 670. $\frac{1}{4}\sqrt{1+\sqrt{2}}$. 671. $\frac{1}{\pi(1+a)}$. 672. $\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{1+e^{\pi}}$. 673. $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$.

674. $\frac{2\pi a}{(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}}$. 675. $\frac{(2a+b)\pi}{[a(a+b)]^{\frac{3}{2}}}$. 676. $\frac{2\pi}{1-a^2}$, si $|a|<1$; $\frac{2\pi}{a^2-1}$, si $|a|>1$; 0 (valor principal), si $|a|=1$, $a\neq\pm 1$ (para $a=\pm 1$ el valor principal no existe). 677. $\frac{\pi(a^6+1)}{1-a^2}$, si $|a|<1$; $\frac{\pi(a^6+1)}{a^6(a^2-1)}$, si $|a|>1$; $\frac{\pi}{2}\frac{1-a^{12}}{a^6(a^2-1)}$ (valor principal), si $|a|=1$, $a\neq\pm 1$ (para $a=\pm 1$ el valor principal no existe). 678. $\frac{2\pi}{n!}$, si $n\geqslant 0$; 0, si $n<0$. 679. πi sign a (para $a=0$ el valor principal de la integral es igual a 0). 680. $-2\pi i$ sign Im a.

682. $-\frac{\pi}{27}$. 683. $\frac{\pi}{4a}$. 684. $\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n-2)}\frac{\pi}{2}$, si $n>1$; $\frac{\pi}{2}$, si $n=1$.

685. $\frac{\pi}{ab(a+b)}$. 686. $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$. 687. $\frac{\pi}{n\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{n}}$. 688. $\frac{\pi}{n}\frac{\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2n}}{\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{n}}$.

690. $\frac{(-1)^{k-1}}{(2ih-z)^k}$. 691. 1) $\frac{\pi}{3e^3}(\cos 1-3\,\mathrm{sen}\,1)$; 2) $\frac{\pi}{3e^3}(3\cos 1+\mathrm{sen}\,1)$.

692. $\frac{\pi}{2e^4}(2\cos 2+\mathrm{sen}\,2)$. 693. $\frac{\pi e^{-ab}}{2b}$. 694. $\frac{\pi}{2}e^{-ab}$. 696. πi, si $t>0$; 0, si $t=0$; $-\pi i$, si $t<0$. 697. $\pi(2\,\mathrm{sen}\,2-3\,\mathrm{sen}\,3)$. 698. $\frac{\pi}{5}\left(\cos 1-\frac{1}{e^2}\right)$.

699. $\frac{\pi}{3}\left[\mathrm{sen}\,|t|+e^{-\frac{|t|\sqrt{3}}{2}}\left(\mathrm{sen}\left|\frac{t}{2}\right|+\sqrt{3}\cos\frac{t}{2}\right)\right]$. 700. $\frac{\pi}{4}[e^{-|t|}-\mathrm{sen}\,|t|]$.

701. $\pi\left(e^{-ab}-\frac{1}{2}\right)$. 702. $\frac{\pi}{2b^2}(1-e^{-ab})$. 703. $\frac{4}{4b^4}[2-(2+ab)e^{-ab}]$.

704. $\pi(b-a)$. 705. $\frac{\pi}{2}$. 706. $\frac{3\pi}{8}$. 707. 1) $\frac{\Gamma(p)\cos\frac{\pi p}{2}}{a^p}$; 2) $\frac{\Gamma(p)\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi p}{2}}{a^p}$; para comprobar que la respuesta es válida para $-1<p<0$, es suficiente observar que para estos valores de p la integral converge y la función, que figura en la respuesta, es analítica. 708. $\frac{1}{p}\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\cos\frac{\pi}{2p}$. 709. $\frac{1}{p}\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2p}$.

710. $\frac{1}{p-1}\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\cos\frac{\pi}{2p}$ $\left(\text{para } p=1 \text{ la integral es igual a } \frac{\pi}{2}\right)$. 712. $\frac{\pi}{\operatorname{sen} p\pi}$.
714. $\frac{\pi}{2\cos\frac{\pi p}{2}}$. 715. $\frac{\pi(1-p)}{4\cos\frac{\pi p}{2}}$ $\left(\text{para } p=1 \text{ la integral es igual a } \frac{1}{2}\right)$.

716. $\frac{\pi}{\operatorname{sen} p\pi}\frac{\operatorname{sen} p\lambda}{\operatorname{sen}\lambda}$, si $\lambda\neq 0$, y $\frac{p\pi}{\operatorname{sen} p\pi}$, si $\lambda=0$. 718. 0. 719. $\frac{\pi}{4}$.

720. $\pi\operatorname{ctg}\pi p$. 721. $\pi\operatorname{ctg} p\pi$. 722. $\frac{\pi p(1-p)}{2^{2-p}\operatorname{sen} p\pi}$. 723. $\frac{\pi}{\operatorname{sen} p\pi}\left(2^{\frac{p}{2}}\cos\frac{p\pi}{4}-1\right)$.
724. $\frac{\pi}{\operatorname{sen} p\pi}\left[2^p\left(1-\frac{p}{2}\right)-1\right]$. 725. $\frac{\pi}{\operatorname{sen} p\pi}\left[1-\left(\frac{a}{1+a}\right)^p\right]$. 726. $\frac{p\pi}{\operatorname{sen} p\pi}\times$
$\times\frac{a^{p-1}}{(1+a)^{p+1}}$. 727. $\frac{\pi}{\operatorname{sen} p\pi}\left(\operatorname{sen}\frac{p\pi}{2}+\cos\frac{p\pi}{2}-1\right)$. 728. $\frac{\pi\sqrt[3]{4}}{\sqrt{3}}$. 729. Si a no pertenece al intervalo $(-1, 1)$, se tiene $I=-\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}$, donde $\sqrt{a^2-1}>0$ para $a>1$ (en el plano con un corte a lo largo del segmento $[-1, 1]$ la magnitud $\sqrt{a^2-1}$ es uniforme); para $a=\pm e^{i\alpha}$ se tiene $I=\pm\frac{\pi}{\sqrt{2\operatorname{sen}\alpha}}e^{i\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}$; para $a=iy$ se tiene $I=\frac{\pi i}{\sqrt{1+y^2}}\operatorname{sign} y$; para $-1<a<1$ se tiene $I=0$ (valor principal). 730. Si b no pertenece al intervalo $(0, 1)$, se tiene $I=\frac{\pi}{\operatorname{sen} p\pi}b^{p-1}(b-1)^{-p}$, donde $(b-1)^{-p}>0$, $b^{p-1}>0$ para $b>1$; si $0<b<1$, se tiene $I=-\pi b^{p-1}(1-b)^{-p}\operatorname{ctg} p\pi$ (valor principal). 731. $\frac{\pi}{n\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}}$. 732. $\frac{\pi}{2a}\ln a$.

733. $\frac{\pi}{8a}(\pi^2+4\ln^2 a)$. 734. $\frac{\pi}{2a^2\sqrt{2a}}\left(\frac{3}{2}\ln a-1-\frac{3\pi}{4}\right)$. 735. $-\pi$.
736. $\frac{\pi}{2}\ln 2$. 737. $\frac{1}{2}\ln^2\frac{a}{1+a}$. 739. 1) $\frac{1}{1-a}+\frac{1}{\ln a}$ $\left(\text{para } a=1 \text{ se tiene } I=\frac{1}{2}\right)$; 2) $\frac{\pi}{2a\left(\ln^2 a+\frac{\pi^2}{4}\right)}-\frac{1}{1+a^2}$. 740. $\frac{1}{2n+1}\left\{\frac{\pi}{2a}\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\times\right.$
$\left.\times\frac{2k+1}{\ln^2 a+\left(k+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}-\frac{1}{1+a^2}\right\}$. 741. $\frac{1}{2n}\left\{\frac{1}{1+a^2}+\frac{\pi}{2a}\sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^{k+1}\times\right.$
$\left.\times\frac{2k+1}{\ln^2 a\left(k+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}\right\}$. 743. $\frac{\pi(1-2^{a-1})}{\operatorname{sen} a\pi}$ (para $a=1$ se tiene $I=\ln 2$).

744. $\frac{\pi}{2}\operatorname{th}\frac{\pi a}{2}$. 745. $\frac{\pi}{2\operatorname{ch}\frac{\pi a}{2}}$. 746. $\frac{\pi^2 e^{\pi a}}{(e^{\pi a}+1)^2}$. 747. $\frac{1}{2\cos\frac{a}{2}}$.

748. $\frac{\pi}{a}\ln(1+a)$, si $0<a<1$; $\frac{\pi}{a}\ln\frac{1+a}{a}$, si $a>1$. 750. 1) $\frac{t^n}{n!}$; 2) $\frac{\ln^n t}{n!}$, si $t>1$; 0, si $t<1$; si $t=1$, se tiene $I=0$ para $n>1$ e $I=\frac{1}{2}$ (valor princi-

pal) para $n=1$. 751. $\frac{e^{at}t^n}{n!}$. 752. $\operatorname{sen} t$. 753. 1) $\cos t$; 2) $t-\operatorname{sen} t$. 754. $\frac{e^{at}}{(b-a)(c-a)}+\frac{e^{bt}}{(a-b)(c-b)}+\frac{e^{ct}}{(a-c)(b-c)}$. 755. $\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{t}\right)^n$, si $t\geqslant 1$; 0, si $t\leqslant 1$. 758. 1) $\frac{e^{-t}}{\sqrt{\pi t}}$; 2) $\frac{e^{-lt}}{\sqrt{\pi t}}$. 759. $\operatorname{erf}\sqrt{t}$, donde

$$\operatorname{erf} u=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^u e^{-x^2}\,dx.$$

760. $e^{-t}\operatorname{erf}\sqrt{t}$. 761. $\operatorname{sen} t$, si $t<\pi$; 0, si $t\geqslant\pi$.

762. 1, si $0<t<a$; 0, si $t=a$; -1, si $a<t<2a$; $-\frac{1}{2}$, si $t=2a$; 0, si $t>2a$. 763. $n+1$, si $na<t<(n+1)a$; $n+\frac{1}{2}$, si $t=na$ ($n=0, 1, 2, \ldots$). 764. $1-\operatorname{erf}\frac{x}{2\sqrt{t}}$ (véase la respuesta al problema 759). 765. $\frac{1}{a}+$

$$+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{a^2}}\frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi r}{a}}{n\pi r}.$$

766. $-Ei(-t)$, donde $Ei(t)=\int_{-\infty}^{t}\frac{e^u}{u}\,du$. 767. $\frac{2\operatorname{sh} t}{t}$. 768. $\frac{2\pi i}{a}$. 769. 0, si $b<0$; $\operatorname{arch}\frac{b}{a}$, si $b>0$. 772. $\frac{1}{\sqrt{z^2+1}\,(z+\sqrt{z^2+1})^n}$ ($\sqrt{z^2+1}>0$ para $z>0$). 773. 1) $\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}$, si $a>b$; 0, si $a<b$; 2) 0, si $a>b$; $\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}$, si $a<b$. 774. $\frac{\pi}{2}J_0\left(i\,|a|\sqrt{t^2-b^2}\right)$.

775. Si la parte real de al menos uno de los polos es positiva, se tiene $\lim_{t\to\infty} f(t)=\infty$; si la parte real de todos los polos es negativa se tiene $\lim_{t\to\infty} f(t)=0$; si unos de los polos se encuentran sobre el eje imaginario y la parte real de los restantes es negativa, resulta que $f(t)$ oscila para $t\to\infty$, con la particularidad de que la amplitud de las oscilaciones crece infinitamente, si al menos uno de los polos del eje imaginario es de orden superior al primero, y permanece acotada, si todos los polos del eje imaginario son simples. Si sobre el eje imaginario hay sólo un polo, situado en el origen de coordenadas, se tiene $f(t)\to\infty$, si el polo es múltiple, y $f(t)\to \operatorname{res}[e^{zt}\varphi(z)]_{z=0}$, si el polo es simple. 777. $f(t)\sim\frac{at-3}{a^4}$. 778. $f(t)\sim\frac{i\omega}{\sqrt{2ai\omega-\omega^2}}e^{i\omega t-\sqrt{2ai\omega-\omega^2}}$. 781. *Solución*. Representemos la integral en la forma $\int_{-x}^{x}\frac{e^{-x-t}}{t}\,dt+\int_{x}^{\infty}\frac{e^{-x-t}}{t}\,dt$. Puesto que para el desarrollo asintótico en potencias negativas de x se tiene $e^{-x}\sim 0$, de la solución del problema 780 se desprende que la segunda integral es asintóticamente igual a cero. Según la definición de valor principal de la integral, tenemos

$$\int_{-x}^{x}\frac{e^{-x-t}}{t}\,dt=e^{-x}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{-x}^{-\varepsilon}\frac{e^{-t}}{t}\,dt+\int_{\varepsilon}^{x}\frac{e^{-t}}{t}\,dt\right]=$$

$$=e^{-x}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{x}\frac{e^{-t}-e^{t}}{t}\,dt=e^{-x}\int_{0}^{x}\frac{e^{-t}-e^{t}}{t}\,dt$$

(el integrando de la última integral es continuo). Por otra parte,

$$\int_0^z \frac{e^{-t}-e^t}{t}\,dt=\int_0^1 \frac{e^{-t}-e^t}{t}\,dt+\int_1^z \frac{e^{-t}}{t}\,dt+\int_1^z \frac{e^t}{t}\,dt \sim O(1)+\int_1^z \frac{e^t}{t}\,dt.$$

Integrando por partes, obtenemos

$$\int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt=C+e^x\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\ldots+\frac{(n-1)!}{x^n}\right)+n!\int_1^x \frac{e^t}{t^{n+1}}\,dt,$$

donde $C=C(n)$ es una magnitud constante. Resta demostrar que

$$\lim_{x\to\infty} x^n e^{-x}\int_1^x \frac{e^t}{t^{n+1}}\,dt=0,$$

lo que se consigue fácilmente aplicando la regla de L'Hospital. **784.** *Solución.*

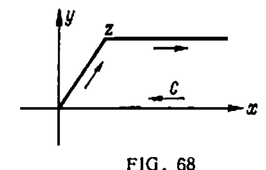


FIG. 68

Consideremos $\int_C e^{z^2-t^2}\,dt$, donde C es el contorno representado en la fig. 68 (para $\operatorname{Re} z>0$). Esta integral es igual a cero y por ello ($z=x+iy$) es tiene

$$\int_0^z e^{z^2-t^2}\,dt=\int_0^\infty e^{z^2-t^2}\,dt-\int_x^\infty e^{z^2-(t+iy)^2}\,dt.$$

La primera integral del miembro de la derecha es igual a $\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{z^2}$; representemos la segunda en la forma

$$-\frac{1}{2}\int_x^\infty \frac{1}{t+iy}\,de^{z^2-(t+iy)^2}=\frac{1}{2z}-\frac{1}{2}\int_x^\infty \frac{e^{z^2-(t+iy)^2}}{(t+iy)^2}\,dt.$$

Repitiendo la integración por partes, obtendremos el desarrollo requerido. Para el resto tenemos la estimación siguiente

$$\left|\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2^n}\int_x^\infty \frac{e^{z^2-(t+iy)^2}}{(t+iy)^{2n}}\,dt\right|<\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2^n}\int_x^\infty \frac{e^{x^2-t^2}}{|t+iy|^{2n}}\,dt.$$

Integrando de nuevo por partes, obtenemos $\int_x^\infty \frac{e^{x^2-t^2}}{|t+iy|^{2n}}\,dt<\frac{1}{2|z|^{2n}x}$, de donde se desprende precisamente que el desarrollo es asintótico. El caso en que $\operatorname{Re} z<0$ se considera análogamente. Si $\operatorname{Re} z=0$, se tiene

$$\left|\int_0^\infty \frac{e^{z^2-(t+iy)^2}}{(t+iy)^{2n}}\,dt\right|<\int_0^\infty \frac{e^{-t^2}}{y^{2n}}\,dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2y^{2n}}.$$

786. $f(t) \sim \frac{1}{\omega} \operatorname{sen}\left(\omega t+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{\omega^2 \pi}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{t^{\frac{3}{2}}}-\frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{\omega^2 t^{\frac{7}{2}}}+\ldots\right.$

$$\left.\ldots+(-1)^n \frac{\left(2n+\frac{3}{2}\right)}{\omega^{2n} t^{2n+\frac{3}{2}}}+\ldots\right];$$

para pequeños valores de t se tiene

$$f(t)=2 \sqrt{\frac{t}{\pi}}\left[1-\frac{(2\omega t)^2}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{(2\omega t)^4}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}-\ldots\right] \approx 2 \sqrt{\frac{t}{\pi}}.$$

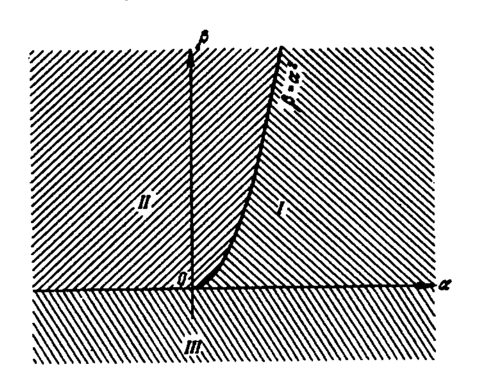


FIG. 69

787. $f(t) \sim 1+\frac{1}{\pi} \sum_0^\infty (-1)^n \frac{\Gamma\left(3n+\frac{3}{2}\right)}{t^{3n+\frac{3}{2}}}$; para pequeños valores de t se tiene

$f(t)=\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}-\frac{t^3}{\Gamma(4)}+\frac{t^{\frac{9}{2}}}{\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)}-\ldots \approx \frac{4t^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{\pi}}$. **788.** 1. **789.** 0. **790.** 4.

792. 1; 3. **793.** 0; 4. **795.** 1. **796.** n. **797.** n. **799.** *Solución.* La sucesión de funciones $f_n(z)$ converge hacia la función $\frac{1}{e^z}$ en todo punto, a excepción de $z=0$. Por consiguiente, para un $\varepsilon > 0$ y cualquier círculo K, que tiene su centro en el punto $z \neq 0$ y que no contiene el origen de coordenadas ni en su interior ni en su frontera, se puede indicar un N tal que la desigualdad $\left|f_n(z)-e^{\frac{1}{z}}\right| < \varepsilon$ tendrá lugar para todos los puntos de K siempre que $n > N$. Resta escoger $\varepsilon < \min_{z \in C}\left|e^{\frac{1}{z}}\right|$, donde C es la circunferencia del círculo K, y aplicar el teorema

de Rouché. *Observación*. La afirmación del problema se desprende directamente del teorema de Hurwitz (véase, por ejemplo, [1, cap. IV, § 3 nº 5]). **803.** 0. **804.** 2; 1. **805.** En cada cuadrante hay una raíz. **806.** Dos raíces tanto en el sengundo como en el tercero cuadrante. **808.** En el recinto $\beta > 0$, $\alpha > +\sqrt{\beta}$ (el recinto I de la fig. 69) se tiene $m=0$; en el recinto $\beta > 0$, $\alpha < +\sqrt{\beta}$ (recinto II) se tiene $m=2$; en el recinto $\beta < 0$ (recinto III) se tiene $m=1$. **809.** En el recinto $\alpha > 0$, $\beta > \frac{1}{\alpha}$ (el recinto I de la fig. 70) se tiene $m=0$; en el recinto, en el que o bien $\alpha \leqslant 0$ o bien $\alpha > 0$, $\beta < \frac{1}{\alpha}$ (el recinto II), se tiene $m=2$. **810.** En el recinto $\alpha > \frac{1}{2}+\sqrt{\beta^2+\frac{1}{4}}$ (el recinto *I* de la fig. 71) se

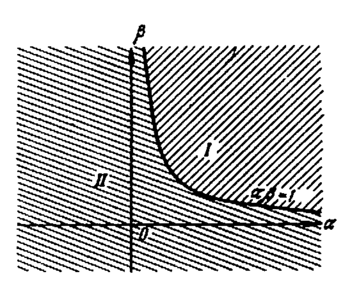


FIG. 70

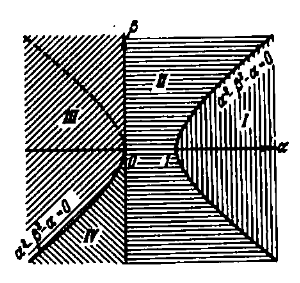


FIG. 71

tiene $m=0$; en el recinto $0 < \alpha < \frac{1}{2}+\sqrt{\beta^2+\frac{1}{4}}$ (el recinto *II*) se tiene $m=2$; en el recinto, en el que o bien $\alpha < \frac{1}{2}-\sqrt{\beta^2+\frac{1}{4}}$ o bien $\frac{1}{2}-\sqrt{\beta^2+\frac{1}{4}} \leqslant \alpha < 0$ y $\beta > 0$ (el recinto *III*), se tiene $m=1$; en el recinto $\frac{1}{2}-\sqrt{\beta^2+\frac{1}{4}} < \alpha < 0$, $\beta < 0$ (el recinto IV) se tiene $m=3$. **812.** El recinto, que contiene el semieje positivo a y que está limitado por las líneas

$$a+b=0 \quad \text{y} \quad \begin{cases} a=-\dfrac{t\cos\tau t}{\operatorname{sen}\tau t}, \\ b=\dfrac{t}{\operatorname{sen}\tau t}, \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

813. El recinto del primer cuadrante limitado por las líneas $b=0$ y $\begin{cases} a=\operatorname{tg}\tau t, \\ b=\dfrac{t^2}{\cos\tau t}, \end{cases} 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2\tau}$. **814.** El recinto finito limitado por el segmento $b=0$, $0 \leqslant a \leqslant \frac{\pi}{2\tau}$ y por el arco $\begin{cases} a=t\operatorname{sen}\tau t, \\ b=t^2\cos\tau t, \end{cases} 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2\tau}$.

824. $z=a+\frac{w}{1!}f(a)+\frac{w^2}{2!}\frac{d}{da}\{[f(a)]^2\}+\frac{w^n}{n!}\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}\{[f(a)]^n\}+\dots$

825. $z=\frac{1}{2}w+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)\dots(2n-2)}{2^{2n-1}\cdot n!}w^n;$

$$z=-2-\frac{1}{2}w+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n(n+1)\dots(2n-2)}{2^{2n-1}\cdot n!}w^n.$$

826. $z=a+\frac{w}{1!}\frac{1}{2}(a^2-1)+\frac{w^2}{2!}\frac{1}{2^2}\frac{d}{da}[(a^2-1)^2]+\dots+\frac{w^n}{n!}\frac{1}{2^n}\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}[(a^2-1)^n]+\dots$

828. 1) $z=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n-1}a^{n-1}}{n!}w^n$; 2) $e^{bz}=b\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(an+b)^{n-1}}{n!}w^n$.

829. $z=a+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{w^n}{n!}\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}(\operatorname{sen}^n a)$. 830. *Solución*. La función $w=\frac{z-\frac{\pi}{2}}{\operatorname{sen} z}$ es analítica en el círculo $\left|z-\frac{\pi}{2}\right|<r$, donde $r<\frac{\pi}{2}$, y no tiene en este círculo más ceros que $z=\frac{\pi}{2}$. En la circunferencia de este círculo se tiene $|w|\geqslant\geqslant\frac{2r}{e^r+e^{-r}}$ y por ello el círculo $|w|<\rho$ de radio $\rho<\frac{2r}{e^r+e^{-r}}$ se transforma biunívocamente en la vecindad correspondiente del punto $z=\frac{\pi}{2}$ de manera que en este círculo el desarrollo de $z(w)$ converge. La función $\frac{2r}{e^r+e^{-r}}$ tiene un máximo para $r=r^*$, donde $e^{2r^*}=\frac{r^*+1}{r^*-1}$ $\left(r^*=1,19\dots<\frac{\pi}{2}\right)$, y este máximo es igual a $\frac{2r^*}{e^{r^*}+e^{-r^*}}=\sqrt{r^{*2}-1}=0{,}6627$. Por consiguiente, el radio de convergencia no es menor de 0,6627... Al mismo tiempo los puntos w, en los cuales $\frac{dw}{dz}=0$, es decir, $\operatorname{tg} z=z-\frac{\pi}{2}$, no pueden estar en el interior del círculo de convergencia del desarrollo de $z(w)$. Poniendo $z-\frac{\pi}{2}=t$, transformemos la ecuación $\frac{dw}{dz}=0$ a la forma $\operatorname{ctg} t=-t$ o $e^{2it}=\frac{it+1}{it-1}$. Luego, $it=r^*$ es una raíz de la ecuación $\frac{dw}{dz}=0$. El valor que le corresponde es $w=\frac{t}{\cos t}=$ $=-\frac{2ir^*}{e^{r^*}+e^{-r^*}}$, de donde $|w|=\frac{2r^*}{e^{r^*}+e^{-r^*}}=\sqrt{r^{*2}-1}=0{,}6627\dots$ Este punto se encuentra, por lo tanto, sobre la circunferencia del círculo de convergencia y el radio de convergencia es, por consiguiente, igual a $\sqrt{r^{*2}-1}=0{,}6627\dots$

Capítulo V

832. El anillo $\frac{1}{2}<|z|<1$. 833. El exterior del círculo unidad ($|z|>1$). 834. $|z|<1$. 835. El semiplano $\operatorname{Re} z<-1$. 836. El eje real. 837. Todo el plano, a excepción de los puntos $z=0,\pm1,\pm2,\dots$. 838. $|z|>1$. 839. $|z|<1$. 840. Todo el plano, a excepción de la circunferencia unidad

($|z| \neq 1$). **841.** Todo el plano, a excepción de los puntos $z = 4^{\frac{1}{n}} e^{\frac{(2k+1)\pi i}{n}}$ ($k,\ n = 1, 2, \ldots$). **842.** *Solución.* Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, es evidente que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n z^n}{1-z^n}$ converge para $|z| < 1$ y entonces de la identidad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n z^n}{1-z^n} = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \left(\frac{1}{z}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{z}\right)^n}$ se deduce que la serie también converge para $|z| > 1$. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ tiene el radio de convergencia $R \leqslant 1$. Para $|z| > 1$ la divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n z^n}{1-z^n}$ se deduce de que, en el caso contrario, serían convergentes la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1-z^n}$ y, por consiguiente, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{1-z^n} - \frac{a_n z^n}{1-z^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Por otra parte, si $|z| < 1$, el módulo de la razón q de los términos generales de las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n z^n}{1-z^n}$ está comprendido entre los límites $1 - |z| \leqslant q \leqslant 2$ y, por consiguiente, ambas series convergen y divergen a la vez. **843.** 1) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$, donde $b_n = \sum a_p$ y con la particularidad de que la suma se toma respecto a aquellos índices p que son divisores del número n, incluyendo 1 y n. El radio de convergencia es $R = \min\{r, 1\}$, donde r es el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$. **844.** $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-2)^n$, donde $a_n = \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\ln k)^n}{k!}$ $\left(a_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}\right)$; $R = 1$. **845.** $\frac{1}{2}$, si $|z| < 1$, y $-\frac{1}{2}$, si $|z| > 1$. **846.** $\frac{z}{(1-z)^2}$, si $|z| < 1$, y $\frac{1}{(1-z)^2}$, si $|z| > 1$. **847.** z, si $|z| < 1$, y 1, si $|z| > 1$. **848.** $\frac{z}{z-1}$, si $|z| < 1$, y $\frac{1}{z-1}$, si $|z| > 1$. **850.** 1) y 2) convergen uniformemente en todo círculo $|z| \leqslant r < 1$ y en todo recinto $|z| \geqslant R > 1$; 3) converge uniformemente en todo el eje real; en los demás puntos diverge. **852.** Converge uniformemente sobre la circunferencia $|z| = 1$; en todos los demás puntos diverge. **853.** Converge uniformemente en todo semiplano $\operatorname{Re} z \geqslant \delta$, donde $\delta > 0$. **854.** Converge uniformemente en todo semiplano $\operatorname{Re} z \geqslant 1 + \delta$, donde $\delta > 0$. **855.** Converge uniformemente sobre el eje real; en todos los demás puntos diverge. **856.** Converge uniformemente en todo segmento $[2k\pi + \varepsilon,\ 2(k+1)\pi - \varepsilon]$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$) del eje real. **857.** No. **864.** $x_c = x_a = -\infty$. **865.** $x_c = -\infty$, $x_a = 1$. **866.** $x_c = -\infty$, $x_a = +\infty$.

867. $x_c=0$, $x_a=+\infty$. 868. $x_c=0$, $x_a=1$. 869. $x_c=x_a=-1$. 870. $x_c=x_a=+\infty$. 873. $x_c=0$; diverge en todos los puntos de la frontera. 874. $x_c=x_a=-2$; diverge en todos los puntos de la frontera. 875. $x_c=x_a=0$: converge (no absolutamente) en los puntos $z=(2k+1)\pi i$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ y diverge en los demás puntos de la frontera. 876. $x_c=x_a=0$; converge absolutamente en todos los puntos de la frontera. 877. $x_c=x_a=0$; converge no absolutamente en todos los puntos de la frontera. 885. La integral converge uniformemente en toda franja $0 < a \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant A < \infty$. 886. La integral converge uniformemente en todo semiplano $\operatorname{Re} z \geqslant a > 0$. 887. La integral converge uniformemente en toda franja $a \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 2-a$, donde $a > 0$. 888. La integral converge uniformemente en toda franja $a \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 1-a$, donde $a > 0$. 889 y 890. La integral converge uniformemente en todo intervalo cerrado del eje real que no contiene el origen de coordenadas. 891. La integral converge uniformemente en el semiplano $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ sin el semicírculo $|z| < r$, donde r es un número positivo tan pequeño como se quiera. 892. La integral converge uniformemente en los intervalos $0 < \alpha \leqslant z \leqslant \beta < 1$ y $1 < \gamma \leqslant z < \infty$. 893. Ejemplo: $f(t)=e^{t^2}$ para $n < t < n+e^{-n^3}$ $(n=1, 2, \ldots)$ y $f(t)=0$ para todos los demás valores de t. 894. $x_c=x_a=0$. 895. $x_c=x_a=-\infty$. 896. $x_c=x_a=+\infty$. 897. $x_c=-\infty$; $x_a=1$. 898. $x_c=-\infty$; $x_a=+\infty$. 899. $x_c=-1$; $x_a=+\infty$. 900. $x_c=0$; $x_a=1$. 901. Diverge en todos los puntos de la frontera. 902. Converge absolutamente. 903. En el punto $z=0$ diverge, en los demás puntos de la frontera converge no absolutamente. 904. Converge no absolutamente en todos los puntos de la frontera.

Capítulo VI

914. *Solución.* Calculando las integrales que figuran en las siguientes desigualdades evidentes

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n+1} x\, dx < \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n} x\, dx < \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n-1} x\, dx,$$

obtenemos

$$\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2n+1} < \frac{\pi}{2} < \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \cdot \frac{1}{2n}.$$

Para demostrar la fórmula de Wallis resta probar que la diferencia entre los miembros extremos de este sistema de desigualdades tiende hacia cero para $n \to \infty$. 916. 1) No se conserva; 2) se conserva. 918. 1) Diverge; 2) diverge (hacia cero); 3) converge; 4) converge. 919. Converge no absolutamente. 920. Diverge. 921. Converge para $p > \frac{1}{2}$ y, además, absolutamente para $p > 1$; diverge para $p \leqslant \frac{1}{2}$. 922. Converge absolutamente para $p > 1$; diverge para $p \leqslant 1$. 923. Converge absolutamente. 925. $|z| < 1$. 926. $|z| < 2$. 927. $|z| < \infty$. 928. $|z| > 1$. 929. $|z| < \frac{1}{e}$. 930. $|z| < \infty$. 931. $|z| < \infty$. 932. $|z| < \infty$. 933. $|z| < \infty$. 940. *Solución.* 1) Restando de la serie $\zeta(s)=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\ldots$ la serie correspondiente a $2^{-s}\zeta(s)$, obtenemos $(1-2^{-s})\zeta(s)=1+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{7^s}+\ldots$; en el miembro de la derecha de esta igualdad no figuran aquellos términos $1/n^s$ para los cuales n es divisible por 2. Análogamente $(1-2^{-s})(1-3^{-s})\zeta(s)=1+$

$+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{7^s}+\ldots$, donde en el miembro de la derecha se omiten aquellos términos $\frac{1}{n^s}$ para los cuales n es divisible por 2 ó 3. En general,

$$(1-p_1^{-s})(1-p_2^{-s})\ldots(1-p_m^{-s})\,\zeta(s)=1+\sum\frac{1}{n^s}, \tag{1}$$

donde, en el miembro de la derecha de (1) la suma se toma respecto a todos aquellos índices n (mayores de la unidad) que no son divisibles por ninguno de los números $p_1, p_2, \ldots, p_m$. Es fácil demostrar que para $\operatorname{Re} s \geqslant 1+\delta$ $(\delta>0)$ la suma de la serie del miembro de la derecha de (1) tiende hacia cero, cuando $m\to\infty$, y que, por consiguiente, $\zeta(s)\prod\limits_{m=1}^{\infty}(1-p_m^{-s})=1$. 2) Como del criterio de convergencia absoluta (véase el problema **917**) se desprende que el producto $\prod\limits_{m=1}^{\infty}(1-p_m^{-s})$ converge para $\operatorname{Re} s\geqslant 1+\delta$, resulta que la función $\zeta(s)$ no tiene ceros, si $\operatorname{Re} s>1$. **941**. *Solución*. De lo demostrado en el problema anterior se desprende que $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-p_n^{-(1+\delta)}\right)=\frac{1}{\zeta(1+\delta)}$ cualquiera que sea $\delta>0$. De aquí es fácil concluir que $\lim\limits_{\delta\to 0}\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-p_n^{-(1+\delta)}\right)=0$. Como, por otra parte, $(1-p_n^{-1})<\left(1-p_n^{-(1+\delta)}\right)$, es claro que el producto $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-p_n^{-1})$ diverge (hacia cero) y que, por consiguiente, la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n^{-1}$ también diverge.

961. $\frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2\pi a}$. **962**. $\frac{\pi^2\operatorname{ctg}\pi a}{\operatorname{sen}\pi a}$. **963**. $\frac{\pi^2}{8}$. **964**. $\frac{1}{2a^2}(1+\pi a\operatorname{cth}\pi a)$.
965. $\frac{1}{2a^2}\left(1+\frac{\pi a}{\operatorname{sh}\pi a}\right)$. **966**. $\frac{\pi^3}{32}$. **967**. $\frac{(-1)^{k+1}2^{2k-1}\pi^{2k}}{(2k)!}B_{2k}$, ($B_{2k}$ es el ero de Bernoulli; véase el problema **485**). **968**. $\frac{\pi}{2}\frac{\operatorname{sen} ab}{\operatorname{sen}\pi a}$. **971**. $\rho=0$.
972. $\rho=n$, $\sigma=a$. **973**. $\rho=1$, $\sigma=3$. **974**. $\rho=1$, $\sigma=3$. **975**. $\rho=3$, $\sigma=2$. **976**. $\rho=2$, $\sigma=\sqrt{5}$. **977**. $\rho=1$, $\sigma=1$. **978**. $\rho=1$, $\sigma=1$. **979**. $\rho=1$, $\sigma=\sqrt{2}$. **980**. $\rho=\frac{1}{2}$, $\sigma=1$. **981**. $\rho=\frac{1}{2^m}$, $\sigma=1$. *Solución*. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2^2\cdot n)!}=$ $(\cos\sqrt{z}+\cos i\sqrt{z})$, de donde $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(2^2\cdot n)!}=\frac{1}{2}\left(\cos\sqrt[4]{z}+\cos i\sqrt[4]{z}\right)$.

Análogamente $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2^3\cdot n)!}=\frac{1}{4}\left(\cos\alpha\sqrt[4]{z}+\cos\alpha^2\sqrt[4]{z}+\cos\alpha^3\sqrt[4]{z}+\cos\alpha^4\sqrt[4]{z}\right)$, donde $\alpha=\sqrt[4]{-1}$, y de aquí obtenemos $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(2^3\cdot n)!}=\frac{1}{4}\sum\limits_{k=1}^{4}\cos\alpha^k\sqrt[8]{z}$, etc.

982. $\rho=\infty$. 983. *Solución.* Es fácil ver que basta con considerar los valores $z>0$. En este caso $\dfrac{\int_0^1 e^{zt^2}\,dt}{e^z}<1$; por otra parte, si $0<\alpha<1$, se tiene

$$\frac{\int_0^1 e^{zt^2}\,dt}{e^{\alpha z}}=\int_0^1 e^{z(t^2-\alpha)}\,dt\geqslant\int_{\sqrt{\alpha}}^1 e^{z(t^2-\alpha)}\,dt\to\infty \text{ para } z\to\infty.$$

Por consiguiente, $\rho=1$, $\sigma=1$. 985. $\rho^*=\text{máx}(\rho_1,\ \rho_2)$. 986. 1) $\rho^*=\rho$, $\sigma^*\leqslant\sigma_1+\sigma_2$; 2) $\rho^*=\rho$, $\sigma^*=\text{máx}(\sigma_1,\ \sigma_2)$. 987. $\rho^*\leqslant\rho$, $\sigma^*\leqslant 2\sigma$; 2) $\rho^*\leqslant\rho$, $\sigma^*\leqslant\sigma$. 988. *Solución.* Si $z=re^{i\varphi}$, la magnitud $\left|1-\frac{z^2}{\lambda_n^2}\right|$ alcanza su valor máximo para $\varphi=\pm\frac{\pi}{2}$ como quiera que se dé r; este valor es igual a $1+\frac{r^2}{\lambda_n^2}$.

Por otra parte, para cualquier $\varepsilon>0\,(\varepsilon<\alpha)$ y para $n>n_0(\varepsilon)$ se tiene $\frac{n}{\beta+\varepsilon}<$ $<\lambda_n<\frac{n}{\alpha-\varepsilon}$ y, por consiguiente,

$$1+\frac{(\alpha-\varepsilon)^2r^2}{n^2}<1+\frac{r^2}{\lambda_n^2}<1+\frac{(\beta+\varepsilon)^2r^2}{n^2} \qquad (*)$$

Pero, puesto que

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{\gamma^2r^2}{n^2}\right)=\frac{\operatorname{sen} i\pi\gamma r}{i\pi\gamma r}=\frac{e^{\pi\gamma r}-e^{-\pi\gamma r}}{2\pi\gamma r}$$

(véase el problema 952 ó el problema 957), de las desigualdades (*) se deduce, en virtud de la arbitrariedad de ε y de la solución del problema 984, que el orden ρ de la función $f(z)$ es igual a 1 y que su tipo σ es no menor del tipo de la función $e^{\pi\alpha z}$ y no mayor del tipo de la función $e^{\pi\beta z}$, es decir, $\pi\alpha\leqslant\sigma\leqslant\pi\beta$. 990. *Solución.* Sean $M(r)$, ρ y σ el máximo de la función $|f(z)|$ sobre la circunferencia $|z|=r$, el orden y el tipo de la función $f(z)$ respectivamente y sean $M_1(r)$, ρ_1 y σ_1 las características correspondientes de la función $f'(z)$. De la igualdad $f(z)=\int_0^z f'(t)\,dt+f(0)$ se deduce que $M(r)\leqslant rM_1(r)+|f(0)|$ y, por consiguiente, se tiene $\rho\leqslant\rho_1$. Como $f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z)^2}$, donde a título de Γ se puede tomar la circunferencia de centro en el punto z y de radio δ ($\delta>0$ es arbitrario), se tiene $M_1(r)\leqslant\frac{M(r+\sigma)}{\sigma'}$, es decir, $\rho_1\leqslant\rho$ y, por lo tanto, $\rho_1=\rho$. De aquí y de las desigualdades obtenidas más arriba deducimos que $\sigma_1=\sigma$. Otro método posible de demostración se basa en el teorema señalado en la pág. 127. 992. $\rho=1$, $\sigma=\frac{1}{e}$. 993. $\rho=a$, $\sigma=\infty$. 994. $\rho=a$, $\sigma=0$. 995. $\rho=0$. 996. $\rho=0$. 997. $\rho=1$, $\sigma=1$. 998. $\rho=1$, $\sigma=2$. 999. $\rho=1$; $h(\varphi)=\cos\varphi$. 1000. $\rho=1$; $h(\varphi)=\cos\varphi$, si $\cos\varphi\geqslant 0$; $h(\varphi)=0$, si $\cos\varphi<0$. 1001. $\rho=1$; $h(\varphi)=|\operatorname{sen}\varphi|$. 1002. $\rho=1$; $h(\varphi)=|\operatorname{sen}\varphi|$. 1003. $\rho=1$;

$h(\varphi) = |\cos\varphi|$. **1004.** $\rho = n$; $h(\varphi) = \cos n\varphi$. **1005.** $\rho = \frac{1}{2}$. $h(\varphi) = \left|\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}\right|$.
1006. 1) $h^*(\varphi) = h(\varphi)$, si $h(\varphi) > 0$; $h^*(\varphi) = 0$, si $h(\varphi) < 0$, y $h^*(\varphi) \leqslant 0$, si $h(\varphi) = 0$; 2) siempre $h^*(\varphi) = h(\varphi)$. **1007.** Ejemplo: $f(z) = e^z - P(z)$, $\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}$.

Capítulo VII

1009. 1) $F^+(z) = (z-a)^n$, $F^-(z) \equiv 0$;
2) $F^+(z) \equiv 0$, $F^-(z) = -\frac{1}{(z-a)^n}$;
3) $F^+(z) = \frac{1}{(z-a)^n}$. $F^-(z) \equiv 0$.
En los tres casos la integral de tipo de Cauchy se convierte en la integral de Cauchy. **1010.** 1) $F^+(z) = \varphi(z) - \sum g_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right)$, $F^-(z) = -\sum g_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right)$;
2) $F^+(z) = \sum g_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right) + g(z)$, $\quad F^- = -\varphi(z) + \sum g_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right) + g(z)$.
$g_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right)$ es la parte principal del desarrollo de la función $\varphi(z)$ en una vecindad del polo a_k; $g(z)$ es la parte principal del desarrollo de $\varphi(z)$ en una vecindad del punto infinito, en la que se incluye el término constante.

1011. $F^+(z) = \dfrac{z + \ln\dfrac{z-2}{z-3}}{z^2-4}$, $F^-(z) = -\dfrac{i}{z^2+1}$. **1012.** $F^+z = \operatorname{ctg} z - \frac{1}{z} - \frac{2z}{z^2-\pi^2}$, en particular, $F^+(0) = 0$, $F^+(\pi) = -\frac{3}{2\pi}$, $F^+(-\pi) = \frac{3}{2\pi}$.
$F^-(z) = -\frac{1}{z} - \frac{2z}{z^2-\pi^2}$. **1013.** $F^+(z) = \frac{z}{2(z+i)}$. $F^-(z) = -\frac{z}{2(z-i)}$.
1014. $F^+(z) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a_n - ib_n)z^n}{R^n}$, $F^-(z) = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{R^n(a_n+ib_n)}{z^n}$; para los valores frontera se tiene:

$$F^+(Re^{i\theta}) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - ib_n)e^{in\theta} = \frac{a_0}{4} + \frac{1}{2}\varphi(Re^{i\theta}) + \frac{i}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-b_n\cos n\theta + a_n\operatorname{sen} n\theta);$$

$$F^-(Re^{i\theta}) = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+ib_n)e^{in\theta} = \frac{a_0}{4} - \frac{1}{2}\varphi(Re^{i\theta}) + \frac{i}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-b_n\cos n\theta + a_n\operatorname{sen} n\theta).$$

1015. 1) Si el punto z pertenece al círculo $Q_k: |z-k\pi| < \frac{\pi}{2}$, se tiene $I_1(z) = f(z-k\pi)$, $I_2(z) = (-1)^k f(z-k\pi)$. En particular, si $|z| < \frac{\pi}{2}$, se tiene $I_1(z) = I_2(z) = f(z)$. Si el punto z se encuentra en el exterior de todos los círculos cerrados $\overline{Q}_k$, se tiene $I_1(z) = I_2(z) = 0$. 2) Sea Q_k el círculo $|z-k\pi| < \pi$. Entonces, $I_1(z) = f(z-k\pi) + f[z-(k-1)\pi]$, $I_2(z) = (-1)^k[f(z-k\pi) - f(z-(k-1)\pi)]$, si $z \in Q_{k-1}Q_k$; $\quad I_1(z) = f(z-k\pi) + f[z-(k+1)\pi]$, $\quad I_2(z) = (-1)^k(f(z-k\pi) -$

$-f(z-(k+1)\pi)]$, si $z \in Q_k Q_{k+1}$; $I_1 = f(z-k\pi)$, $I_2(z) = (-1)^k f(z-k\pi)$, si z pertenece al interior del recinto $Q_k - Q_{k-1}Q_k - Q_k Q_{k+1}$; $I_1(z) = 0$, $I_2(z) = 0$, si z pertenece al interior del complemento de todos los Q_k. **1016.** $F(z) = \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{z-1}{z+1}$[1]; $F^{\pm}(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{1-\zeta}{1+\zeta} \pm \frac{1}{2}$, $F(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{1-\zeta}{1+\zeta}$ $(-1 < \zeta < 1)$; $F(\pm i) = \pm \frac{1}{4}$, $F^{\pm}(0) = \pm \frac{1}{2}$, $F(0) = 0$. **1017.** $F(z) = \frac{1}{2\pi i} \operatorname{Ln} \frac{z+R}{z-R}$ (la rama uniforme sobre el z-plano con un corte a lo largo de C, definida por el valor $\operatorname{Ln} 1 = 0$). $\operatorname{Ln} \frac{z+R}{z-R} = \ln \left| \frac{z+R}{z-R} \right| + i\Delta_C \arg(\zeta - z)$, donde $\Delta_C \arg(\zeta - z)$ es el incremento de $\arg(\zeta - z)$ a lo largo de C.

$$F^+(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \ln \left| \frac{\zeta+R}{\zeta-R} \right| + \frac{3}{4}, \quad F^-(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \ln \left| \frac{\zeta+R}{\zeta-R} \right| - \frac{1}{4},$$

$$F(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \ln \left| \frac{\zeta+R}{\zeta-R} \right| + \frac{1}{4}; \quad F(0) = \frac{1}{2}, \quad F^+(iR) = \frac{3}{4}, \quad F^-(iR) = -\frac{1}{4},$$

$$F(iR) = \frac{1}{4}; \quad F'(0) = -\frac{i}{\pi R}.$$

1018. $F(z) = \frac{1}{2\pi i} \operatorname{Ln} \frac{z+R}{z-R}$ (la rama uniforme sobre el z-plano con un corte a lo largo de C, definida por el valor $\operatorname{Ln} 1 = 0$; para $|z| > R$ ella coincide con la rama análoga del problema 1017); $F^+(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \ln \left| \frac{\zeta+R}{\zeta-R} \right| + \frac{1}{4}$, $F^-(\zeta) = \frac{i}{2\pi i} \times \ln \left| \frac{\zeta+R}{\zeta-R} \right| - \frac{3}{4}$; $F(0) = -\frac{1}{2}$, $F'(0) = -\frac{i}{\pi R}$. **1019.** 1) 0, si $|z| < r$ ó $|z| > R$, y $\frac{1}{z^n}$, si $r < |z| < R$; 2) $\frac{1}{z^n}$, si $\operatorname{Im} z > \pi$, y 0, si $\operatorname{Im} z < \pi$; 3) 0, si $|\operatorname{Im} z| < \pi$, y $-\frac{1}{z^n}$, si $|\operatorname{Im} z| > \pi$; 4) $\frac{1}{2\pi i z^n} \left[\operatorname{Ln} \frac{R+z}{R-z} - 2 \sum_{k=1}^{m} \frac{z^{2k-1}}{(2k-1)R^{2k-1}} \right]$, si $m = \left[\frac{n}{2} \right]$, donde $\operatorname{Ln} \frac{R+z}{R-z} = \ln \left| \frac{R+z}{R-z} \right| + i\Delta_C \{\arg(\zeta - z) - \arg \zeta\}$ es la rama uniforme sobre el z-plano con un corte a lo largo de C, definida por el valor $\operatorname{Ln} 1 = 0$. La parte imaginaria del valor frontera de esta rama sobre C por la izquierda es igual a $\frac{\pi}{2}$ y por la derecha, a $\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$. Con esto quedan determinados los valores frontera de $F^{\pm}(\zeta)$ sobre C; $F(0) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1+(-1)^{n-1}}{nR^n}$; 5) la función $F(z)$ es la misma que en el punto anterior, pero $\operatorname{Ln} \frac{R+z}{R-z}$ es la rama uniforme sobre el z-plano con un corte a lo largo de la otra semicircunferencia

---

[1] A simple vista la solución es evidente:

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^{1} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} [\ln(1-z) - \ln(-1-z)] = \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{z-1}{z+1}.$$

Sin embargo, es preciso comprobar que la última transformación conduce efectivamente a la rama señalada del logaritmo, ya que la igualdad $\ln z_2 - \ln z_1 = \ln \frac{z_2}{z_1}$, en general, no es válida. Esta observación debe también tenerse en cuenta en lo sucesivo.

C y con el mismo valor $\operatorname{Ln} 1 = 0$. La parte imaginaria del valor frontera de esta rama sobre C por la izquierda es igual a $\frac{3\pi}{2}$ y por la derecha, a $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$. Con esto quedan determinados los valores frontera de $F^{\pm}(\zeta)$ sobre C; $F(0) = \frac{1}{2\pi i}\frac{1+(-1)^{n-1}}{nR^n}$. *Observación*. En los puntos 4) y 5) las ramas de $\operatorname{Ln}\frac{R+z}{R-z}$ coinciden en el círculo $|z| < R$, pero son, en general, distintas; por ejemplo, en el ∞ el valor de la rama es $-\pi i$ en el primer caso y $+\pi i$ en el segundo. Sin embargo $F(\infty) = 0$. **1020.** $\operatorname{Ln}\frac{b-z}{a-z} = \ln\left|\frac{b-z}{a-z}\right| + i\Delta_C \arg(\zeta - z)$, la rama uniforme sobre el z-plano con un corte a lo largo de C, definida por el valor $\operatorname{Ln} 1 = 0$ (de la misma forma se definen las ramas en los problemas 1021—1024). **1021.** $b-a+z\operatorname{Ln}\frac{b-z}{a-z}$. **1022.** 1) $\sum_{k=1}^{n} A_{nk}z^{k-1} + z^n \operatorname{Ln}\frac{b-z}{a-z}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} c_n A_{nk} z^{k-1} + \varphi(z)\operatorname{Ln}\frac{b-z}{a-z}$, donde $A_{nk} = \frac{b^{n-k+1}-a^{n-k+1}}{n-k+1}$. **1023.** $\frac{1}{z-z_0}\left(\operatorname{Ln}\frac{b-z}{a-z} - \operatorname{Ln}\frac{b-z_0}{a-z_0}\right)$.
1024. $\frac{1}{(z-z_0)^n}\left[\operatorname{Ln}\frac{b-z}{a-z} - \operatorname{Ln}\frac{b-z_0}{a-z_0} + \sum_{k=2}^{n} A_k (z-z_0)^{k-1}\right]$,

$$A_k = \frac{1}{k-1}\left[\frac{1}{(b-z_0)^{k-1}} - \frac{1}{(a-z_0)^{k-1}}\right], \quad F(z_0) = -A_{n+1}.$$

1025. 1) $F^+(z) = \ln(z+R)$, $F^-(z) = \ln\left(1+\frac{R}{z}\right)$; $F^+(\zeta) = \ln 2R\cos\frac{\varphi}{2} + i\frac{\varphi}{2}$, $F^-(\zeta) = \ln 2\cos\frac{\varphi}{2} - i\frac{\varphi}{2}$; 2) $F^+(z) = \ln(R-z) + \pi i$[1], $F^-(z) = \ln\left(1-\frac{R}{z}\right)$; $F^+(\zeta) = \ln 2R\left|\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}\right| + i\frac{\pi+\varphi}{2}$, $F^-(\zeta) = \ln 2\left|\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}\right| + i\frac{\pi-\varphi}{2}$ (el sentido del ángulo $\varphi = \arg\zeta$ corresponde a las condiciones del problema).
1026. 1) $F^+(z) = 0$, $F^-(z) = \ln\left(1-\frac{1}{z}\right)$; $F^+(\zeta) = 0$, $F^-(\zeta) = \ln\left(1-\frac{1}{\zeta}\right)$; 2) $F^+(z) = \ln\frac{z}{z-1}$, $F^-(z) = 0$; $F^+(\zeta) = \ln\frac{\zeta}{\zeta-1}$; $F^-(\zeta) = 0$. **1027.** $F(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{nz^n}\left[\operatorname{Ln}\frac{R+z}{R-z} - 2\sum_{k=1}^{m}\frac{z^{2k-1}}{(2k-1)R^{2k-1}}\right]$, donde $m = \left[\frac{n}{2}\right]$ y $\operatorname{Ln}\frac{R+z}{R-z}$ tiene el mismo valor que en el roblema 1019, 4). Con esto quedan determinados también los valores frontera de $F^{\pm}(\zeta)$ sobre C. Si $|z| < R$, se tiene $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, donde $c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \ln\frac{\zeta}{\zeta-1}\frac{d\zeta}{\zeta^{n+1}}$. **1028.** $F^+(z) = -\frac{1}{\pi i}\times \left[2 + \sqrt{z}\ln\frac{1-\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}}\right]$, $F^-(z) = -\frac{1}{\pi i}\left[2+\sqrt{z}\ln\frac{1-\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}}\right] - \sqrt{z}$.

---

[1] Si $\operatorname{Ln} z$ y $\ln z$ son las ramas señaladas en la condición del problema, se tiene $\operatorname{Ln} z = \ln(-z) + \pi i$.

1029. $F^+(z)=0$, $F^-(z)=\operatorname{Ln}\frac{z-b}{z-a}$ (la rama del logaritmo se determina por la condición del problema). **1030.** $F^+(z)=1$, $F^-(z)=1-\sqrt{\frac{z-a}{z-b}}$. **1031.** $F^+(z)=z-\lambda a-(1-\lambda)b$, $F^-(z)=z-\lambda a-(1-\lambda)b-(z-a)^{\lambda}(z-b)^{1-\lambda}$. **1032.** $F^+(z)=\operatorname{Ln}\frac{z-\zeta_0}{z-b}$, $F^-(z)=\operatorname{Ln}\frac{z-\zeta_0}{z-a}$. **1034.** $-x^2+x-3{,}5$. **1035.** 1) $\frac{1}{2}\left(\ln\frac{z}{z-1}\right)^2$; 2) $\frac{1}{2}\left(\ln\frac{\tau}{1-\tau}\right)^2-\frac{\pi^2}{2}$. **1037.** Si $|z|>1$ y $z\overline{\in}C$, se tiene $F(z)=\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{z}{z-1}\operatorname{Ln}\frac{R+z}{R-z}+F_1(z)$, donde $F_1(z)$ es una función analítica para $|z|>1$ y la rama de $\operatorname{Ln}\frac{R+z}{R-z}$ se escoge igual que en el problema **1019**, 4). De aquí se desprende el comportamiento de $F(z)$ en los puntos $\pm R$, que son los extremos del arco C. **1038.** $D(f)$ es el área del recinto G' en el que la función $f(z)$ transforma el recinto G. **1044.** 1) $\ln\left|\frac{R^2-\overline{\zeta}z}{R(z-\zeta)}\right|$; 2) $\ln\left|\frac{z-\overline{\zeta}}{z-\zeta}\right|$; 3) $\ln\left|\frac{e^{\pi z}-e^{\pi\overline{\zeta}}}{e^{\pi z}-e^{\pi\zeta}}\right|$. **1050.** $u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\zeta)\frac{r^2-R^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}\,d\theta$, $u(\infty)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\zeta)\,d\theta$. **1052.** 1) $f(z)=\varphi(z)+\overline{\psi\left(\frac{R^2}{\overline{z}}\right)}$, $f_1(z)=-\overline{\varphi\left(\frac{R^2}{\overline{z}}\right)}-\psi(z)$, y, además, $v(0)=\operatorname{Im}f(0)=\operatorname{Im}[\varphi(0)+\overline{\psi(\infty)}]$; 2) $f(z)=-i\varphi(z)+\overline{i\psi\left(\frac{R^2}{\overline{z}}\right)}$, $f_1(z)=\overline{i\varphi\left(\frac{R^2}{\overline{z}}\right)}+i\psi(z)$, $v(0)=\operatorname{Im}f(0)=\operatorname{Im}[-i\varphi(0)+\overline{i\psi(\infty)}]$. **1053.** 1) $f(z)=z^n$, $f_1(z)=-\frac{R^{2n}}{z^n}$ (aquí, así como en las respuestas a los problemas 1054—1057, el valor de $v(0)$ se toma igual a cero). **1054.** $f(z)=\frac{z^n}{R^{2n}}$, $f_1(z)=-\frac{1}{z^n}$. **1055.** $f(z)=-\ln\left(1-\frac{z}{R^2}\right)$ ($\ln 1=0$), $f_1(z)=\ln\left(1-\frac{1}{z}\right)$. **1056.** $f(z)=\frac{R}{\sqrt{R^2-z}}$ $\left(f(0)=\frac{1}{R}\right)$, $f_1(z)=-\sqrt{\frac{z}{z-1}}$. **1057.** $f(z)=\ln R$, $f_1(z)=-\ln R$. **1059.** $u(z)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u(t)\frac{y\,dt}{(t-x)^2+y^2}$, $f(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(t)\,dt}{t-z}+iC$ (para la existencia de la primera integral es suficiente que $u(t)$ sea acotada y continua a trozos en el intervalo $(-\infty,\infty)$ y para la existencia de la segunda integral es suficiente exigir además que, por ejemplo, $u(t)$ sea de orden $\frac{1}{|t|^{\alpha}}$ $(\alpha>0)$ en el infinito). **1060.** $f(z)=u(z)+iv(z)=\frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty}u(t)\operatorname{cth}\frac{\pi(t-z)}{2}\,dt-\frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty}u_1(t)\operatorname{th}\frac{\pi(t-z)}{2}\,dt$, donde $u_1(t)=u(t+i)$ (para la existencia de las integrales es suficiente, por ejemplo, que $u(t)$ decrezca en el infinito como $\frac{1}{|t|^{1+\alpha}}$, $\alpha>0$). **1062.** Las circunferencias del círculo $|z|<1$ tangentes a la

circunferencia $|z|=1$ en el punto $e^{i\vartheta}$. **1064.** Los arcos circulares que unen en el interior del círculo $|z|<1$ los puntos $e^{i\vartheta_1}$ y $e^{i\vartheta_2}$. **1065.** $\omega(z;\ a,\ b)=$ $=\frac{1}{\pi}\arg\frac{z-b}{z-a}$, $\omega(z;\ -\infty,\ b)=\frac{1}{\pi}\arg(z-b)$; $\omega(z;\ a,\ \infty)=1-\frac{1}{\pi}\arg(z-a)$. El significado geométrico de estas medidas armónicas es el ángulo, bajo el cual se ve el segmento o el rayo desde el punto z, dividido por π. **1066.** $1-\frac{1}{\gamma}\arg z$ para el rayo $\arg z=0$ y $\frac{1}{\gamma}\arg z$ para el rayo $\arg z=\gamma$. **1067.** $\omega(z,\ \Delta)=$ $=\frac{2}{\pi}\arg\frac{z-R}{z+R}-1=1-\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{2Ry}{R^2-|z|^2}$, $\omega(z,\ \Gamma)=1-\omega(z,\ \Delta)$. Las líneas equipotenciales son arcos circulares que unen los puntos $\pm R$, desde los puntos de estos arcos el diámetro Δ se ve bajo el ángulo $\frac{\pi}{2}(1+\omega)$ en el caso de $\omega(z,\ \Delta)$ y $\pi\left(1-\frac{\omega}{2}\right)$ en el caso de $\omega(z,\ \Gamma)$. **1068.** $\omega(z,\ \Gamma)=\frac{2}{\pi}\arg\frac{z-R}{z+R}$. **1069.** $\omega(z,\ \Gamma)=\frac{2}{\pi}\arg\frac{\sqrt{z}-\sqrt{R}}{\sqrt{z}+\sqrt{R}}$. **1070.** $\frac{\ln|z|-\ln z}{\ln R-\ln r}$ para $|z|=R$ y $\frac{\ln|z|-\ln R}{\ln r-\ln R}$ para $|z|=r$. **1073.** $u(z)=\sum_{\nu=1}^{n}C_\nu\omega_\nu(z)$.

Capítulo VIII

1078. $f(z)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(1-a)^{n+1}}$; mediante este desarrollo $f(z)$ se prolonga analíticamente al interior del círculo $|z-a|<|1-a|$, que no pertenece íntegramente al *interior del círculo* $|z|<1$, *siempre que* a *no pertenezca al intervalo* $[0,\ 1)$. **1079.** $f(z)=\ln\frac{2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n\frac{\left(z+\frac{1}{2}\right)^n}{n}$; el círculo de convergencia de esta serie es $\left|z+\frac{1}{2}\right|<\frac{3}{2}$. **1093.** *Solución.* La sustitución $e^t=x$ lleva la integral a la forma $f(s)=\int_1^\infty\frac{\operatorname{sen}x\,dx}{x^s}$ $(x^s=e^{s\ln x})$. Integrando por partes, obtenemos $f(s)=\cos 1-\int_1^\infty\frac{\cos x}{x^{s+1}}dx$. La última integral converge en el semiplano $\operatorname{Re}s>-1$. **1096.** $0<\operatorname{Re}z<1$, $-1<\operatorname{Re}z<1$. **1098.** El punto $z=1$ es un polo simple de residuo igual a la unidad. **1099.** *Solución.* Tomemos $f_1(z)=$ $=\int_0^\infty e^{-t}\varphi(zt)\,dt$. La analiticidad de la función $f_1(z)$ en el círculo $|z|<1$ se desprende del resultado del problema 535 y de las propiedades generales de la integral de Laplace (véase la pág. 117). Integrando por partes $(n+1)$ veces y haciendo uso de las desigualdades del problema 536, obtenemos para $|z|<1$

$$f_1(z)=-\sum_{k=0}^{n}z^k\left[e^{-t}\varphi^{(k)}(zt)\right]_0^\infty+z^{n+1}\int_0^\infty e^{-t}\varphi^{(n+1)}(zt)\,dt=\sum_{k=0}^{n}a_nz^n+$$

$+z^{n+1}\int\limits_0^\infty e^{-t}\varphi^{(n+1)}(zt)\,dt$. De la estimación para $|\varphi^{(n+1)}|$ se desprende que el segundo sumando del miembro de la derecha de la última igualdad tiende hacia cero para $n\longrightarrow\infty$ ($|z|<r$). Para demostrar la segunda afirmación tomemos un punto cualquiera $z\in G$. Entonces, en el interior y en la frontera del círculo, para el cual Oz sirve de diámetro, no habrá, como es fácil de demostrar, ningún punto singular de la función $f(z)$. Por ello la función $f(z)$ también será analítica en el interior y en la frontera C del círculo de radio $\frac{|z|}{2}+\delta$, concéntrico con el ya construido, siempre que $\delta>0$ sea lo suficientemente pequeño. Por lo tanto, para los coeficientes c_n del desarrollo $f(z)\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ son válidas las igualdades $c_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\,d\zeta$ y, por consiguiente,

$$\varphi(zt)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^nt^n}{n!}\int\limits_C\frac{f(\zeta)\,dz}{\zeta^{n+1}}.$$

Como la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^nt^nf(\zeta)}{n!\,\zeta^{n+1}}$ converge uniformemente sobre C, se tiene $\varphi(zt)=$ $=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C f(\zeta)\,e^{zt/\zeta}\frac{d\zeta}{\zeta}$. El máximo sobre C de la magnitud $\operatorname{Re}\left(\frac{z}{\zeta}\right)$ es igual a $\frac{|z|}{|z|+\delta}=q<1$ (al demostrar esta afirmación es suficiente limitarse al caso en que z es real y positivo, ya que una rotación alrededor del origen de coordenadas no varía la magnitud de $\operatorname{Re}(z/\zeta)$ y, por consiguiente, $|\varphi(zt)|<Ae^{qt}$ (A es una constante). De aquí se desprende precisamente que la integral $\int\limits_0^\infty e^{-t}\varphi(zt)\,dt$ converge. **1103.** Si $\operatorname{Ln}^{(1)}\frac{z-z_2}{z-z_1}$ es aquella rama de la función $\operatorname{Ln}\frac{z-z_2}{z-z_1}$ que es analítica en el z-plano con un corte a lo largo del arco γ_1 y que es *igual a 0 para $z=\infty$, se tiene* $F^-(z)=(a-b)\operatorname{Ln}^{(1)}\frac{z-z_2}{z-z_1}$, $F^+(z)=$ $=(a-b)\operatorname{Ln}^{(1)}\frac{z-z_2}{z-z_1}+2\pi bi$; en el interior de G^+ se tiene $F^-(z)=$ $=(a-b)\operatorname{Ln}^{(1)}\frac{z-z_2}{z-z_1}-2\pi i(a-b)$ para la prolongación analítica a través de γ_1 y $F^-(z)=(a-b)\operatorname{Ln}^{(1)}\frac{z-z_2}{z-z_1}$ para la prolongación analítica a través de γ_2. **1105.** 1) $z=\pm 3$; 2) $z=\pm 2i$; 3) $z=\pm 2i$. En los tres casos los valores de $w'(z)$ son diferentes. **1107.** Sobre $z=1$ hay dos elementos: $z=1+t$,

$$w_1=\frac{1-(1-t)^{1/2}}{t}=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}t+\ldots,\ |t|<1,$$
$$w_2=\frac{1+(1-t)^{1/2}}{t}=\frac{2}{t}-\frac{1}{2}+\ldots,\ 0<|t|<1;$$

sobre $z=2$ hay un elemento algebraico: $z=2+t^2$, $w=\frac{1}{1+it}=1-it-t^2+\ldots$, $|t|<1$. **1108.** Sobre $z=1$ hay dos elementos algebraicos: $z=1+t^2$, $w=$

$= i \pm \sqrt{2}\left(1-\frac{t}{2}\right)^{1/2} = \pm i\sqrt{2}\left(1-\frac{t}{4}+\dots\right)$, $|t|<2$; sobre $z=5$ hay un elemento algebraico: $z=5+t^2$, $w=\frac{t}{2}\left(1-\frac{t^2}{32}+\dots\right)$, $|t|<2$ y dos elementos *regulares:* $z=5+t$, $w=\pm 2i\left(1+\frac{t}{32}+\dots\right)$, $|t|<4$; *sobre* $z=\infty$ *hay un elemento* algebraico: $z=t^{-4}$, $w=\frac{1}{t}-t+\dots$, $0<|t|<\sqrt[4]{\frac{1}{5}}$. **1109.** Sobre $z=1$ hay dos elementos algebraicos: $z=1+t^2$, $w=\pm(1+t)^{1/2}=\pm\left(1+\frac{1}{2}t-\dots\right)$, $|t|<1$. **1110.** Sobre $z=1$ hay tres elementos algebraicos: $z=1+t^3$; $w=\omega_k\left(1+\frac{t}{3}+\dots\right)$, $|t|<1$, donde $\omega_1=1$, $\omega_{2,3}=e^{\pm\frac{2\pi i}{3}}$. Sobre $z=2$ hay un elemento algebraico: $z=2+t^3$, $w=-\frac{t}{\sqrt[3]{2}}\left(1-\frac{t^3}{12}+\dots\right)$, $|t|<1$ y tres elementos regulares:

$$z=2+t,\quad w=\omega_k\sqrt[3]{2}\left(1+\frac{t}{12}+\dots\right),\ |t|<1.$$

Sobre $z=\infty$ hay un elemento algebraico: $z=t^{-6}$, $w=\frac{1}{t}+\frac{t^2}{3}+\dots$, $0<|t|<\sqrt[6]{\frac{1}{2}}$. **1111.** Sobre $z=\infty$ hay dos *elementos algebraicos:* $z=t^{-2}$, $w=\pm\frac{1}{t}(1-at)^{\frac{1}{2}}(1-bt)^{\frac{1}{2}}=\pm\frac{1}{t}\left(1-\frac{a+b}{2}t+\dots\right)$, $0<|t|<\min\left(\frac{1}{|a|},\frac{1}{|b|}\right)$. **1112.** $z=0$ es un punto singular bivalente: $z=t^2$, $w=e^{\frac{1}{t}}=1+\frac{1}{t}+\frac{1}{2!t^2}+\dots$, $0<|t|<\infty$. **1113.** Sobre $z=0$ hay un elemento algebraico: $z=t^2$, $w=\frac{\operatorname{sen} t}{t^4}=\frac{1}{t^3}-\frac{1}{3!t}+\frac{1}{5!}t-\dots$, $0<|t|<\infty$. **1114.** Sobre $z=0$ hay un elemento algebraico: $z=t^3$, $w=\operatorname{ctg} t=\frac{1}{t}-\frac{t}{3}+\dots$, $0<|t|<\pi$. **1115.** Sobre $z=0$ hay un elemento algebraico: $z=t^2$, $w=t\left(1-\frac{t^4}{12}+\dots\right)$, $|t|<\sqrt{\pi}$. **1116.** Sobre $z=1$ hay un punto trascendental de ramificación de primer orden; sobre $z=\infty$ hay un p. a. r. de primer orden. **1117.** Tanto sobre $z=0$ como sobre $z=\infty$ hay un p. a. r. de primer orden; sobre $z=1$ hay un punto regular y un punto singular esencial de carácter uniforme. **1118.** Tanto sobre $z=0$ como sobre $z=\infty$ hay un p. a. r. de primer orden; sobre cada uno de los puntos $z=\left(1+\frac{1}{k\pi}\right)^2$ $(k=\pm 1, \pm 2, \dots)$ hay un punto regular y un polo de primer orden; sobre $z=1$ hay un punto regular y un punto singular no aislado de carácter uniforme (que es el punto de acumulación de los polos). **1119.** Sobre $z=0$ hay un p. a. r. de primer orden; sobre cada uno de los puntos $z=k^2\pi^2$ $(k=\pm 1, \pm 2, \dots)$ hay dos polos de primer orden; sobre $z=\infty$ hay un punto no aislado de ramificación (que es el punto de acumulación de los polos). **1120.** Sobre cada uno de los puntos $z=0$ y $z=2$ hay seis p. a. r. de primer orden: sobre $z=1$ hay dos p. a. r. de segundo orden y seis puntos regulares, sobre $z=\infty$ hay dos p. a. r. de quinto orden. **1121.** Sobre cada uno de los puntos $z=i$ y $z=-i$ hay un conjunto infinito de polos de primer orden; sobre $z=0$ y $z=\infty$ hay un p. l. r. **1122.** Sobre $z=1$ hay un conjunto infinito de puntos regulares

y un conjunto infinito de polos de primer orden; sobre $z=0$ y sobre $z=\infty$ hay un p. l. r. **1123.** $w=\frac{1}{4}$, $w=\infty$ que son p. a. r. de primer orden. **1124.** $w=\pm 2$ que es un p. a. r. de primer orden; $w=\infty$ que es un p. a. r. de segundo orden. **1125.** $w=\frac{1}{4}$, $w=\infty$ que son p. a. r. de primer orden. **1126.** $w=0$, $w=\infty$ que son p. a. r. de primer orden. **1127.** $w=\frac{1}{2}e^{\pm i\alpha}$ $(a=\cos\alpha)$ que son p. a. r. de primer orden. **1128.** $w=\infty$ que es un p. a. r. de orden $(n-1)$. A cada cero de la derivada $w'(z)$ de orden k corresponde un p. a. r. de la función $z(w)$ del mismo orden. **1129.** A los ceros de la derivada $w'(z)$ corresponden p. a. r. del mismo tipo que en el caso anterior. A los polos de orden mayor de la unidad

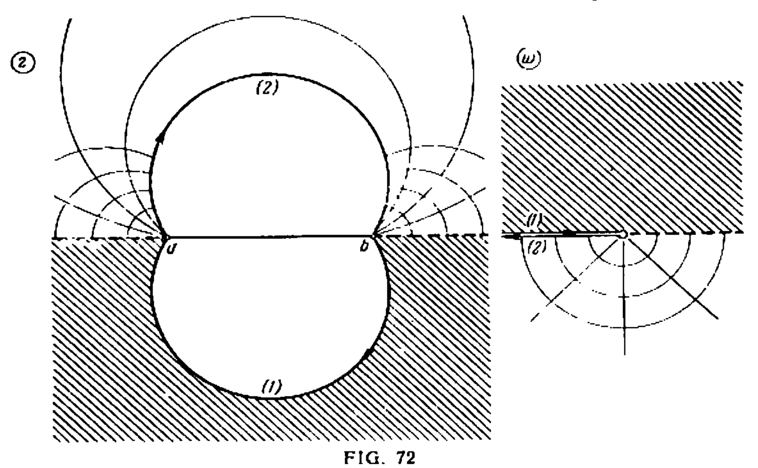


FIG. 72

de la función $w(z)$ les corresponden p. a. r. de orden menor en una unidad del orden del polo. Si en el ∞ se tiene $w(z)=w_0+\frac{c_{-k}}{z^k}+\ldots$ $(k>1)$, al punto $z=\infty$ le corresponde un p. a. r. de orden $(k-1)$ sobre $w=w_0$. **1130.** La superficie para $z(w)$ es la misma que para $\sqrt[n]{w}$; sus puntos de ramificación se encuentran sobre $w=0$ y $w=\infty$ y corresponden a $z=-n$ y $z=\infty$. A las hojas del w—plano con cortes $0<u<\infty$, $v=0$ les corresponden ángulos $\frac{2\pi}{n}$ de vértice en el punto $z=-n$. Para $n\to\infty$ estos ángulos se convierten en franjas horizontales de anchura 2π, la función $w(z)$ se convierte en e^z y la superficie para $z(w)$, en la superficie para $\operatorname{Ln} w$. **1131.** La superficie para $z(w)$ es la misma que para $\sqrt[n]{w}$. A las hojas del w—plano con cortes $-\infty<u<0$, $v=0$ les corresponden biángulos circulares que forman ángulos de $2\pi/n$ en los puntos $z=a$ y $z=b$ (fig. 72, donde $n=3$)[1]. **1132.** La superficie para $z(w)$ se obtiene pegando dos

[1] En las figuras que acompañan los problemas de este capítulo, los puntos correspondientes se denotan con las mismas letras. Para los puntos del infinito se emplea, como regla general, la denotación Ω y Ω'.

hojas del w—plano con cortes $|u| < 1$, $v=0$, correspondientes a los recintos $|z| < 1$ y $|z| > 1$. Los puntos de ramificación se encuentran sobre $w = \pm 1$ y corresponden a $z = \pm 1$. A la red polar $|z| = r$, $\arg z = \varphi$ corresponden elipses e hipérbolas de focos ± 1: $\dfrac{x^2}{\left[\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\right]^2} + \dfrac{y^2}{\left[\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)\right]^2} = 1$; $\dfrac{x^2}{\cos^2\varphi} - \dfrac{y^2}{\operatorname{sen}^2\varphi} = 1$.

1133. $w(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + 3z^3 + \ldots$; ésta es una función extremal conocida

FIG. 73

de la teoría de transformaciones conformes univalentes. Ella transforma el círculo unidad $|z| < 1$ en el w—plano con el corte $-\infty < u < -\frac{1}{4}$, $v=0$. La superficie para $z(w)$ se obtiene pegando dos hojas de este tipo. **1134.** La superficie para $z(w)$ se obtiene pegando sucesivamente $2n$ hojas del w—plano con cortes $1 < |u| < \infty$, $v=0$. Ella tiene $2n$ puntos de ramificación de primer orden sobre $w = \pm 1$ y dos

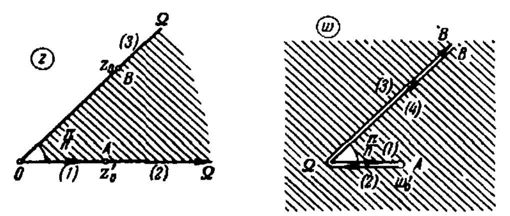


FIG. 74

puntos de ramificación de orden $(n-1)$ sobre $w = \infty$. La transformación principal se indica en la fig. 73. La función $w(z)$ es automorfa (invariante) respecto al grupo de transformaciones lineales generado por las transformaciones $T = \omega z \left(\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)$, $S = \dfrac{1}{z}$. A estas transformaciones corresponden las transformaciones de la superficie para $z(w)$ en sí misma, tales que las hojas se transfor-

man cíclicamente una en otra, conservándose las proyecciones de los puntos sobre el w—plano. **1135.** La superficie para $z(w)$ es de $2n$ hojas con un punto de ramificación de orden $2n-1$ sobre $w=0$, correspondiente a $z=\infty$, y con $2n$ puntos de ramificación de primer orden, de los cuales n se encuentran sobre $w=\infty$ y corresponden a los puntos $z_k=e^{\frac{\pi i}{n}}\omega^k$ $\left(\omega=e^{\frac{2\pi i}{n}},\ k=0, 1, 2, \ldots, n-1\right)$ y los otros n se encuentran sobre los puntos $w_k'=\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^2 z_k'$ y corresponden

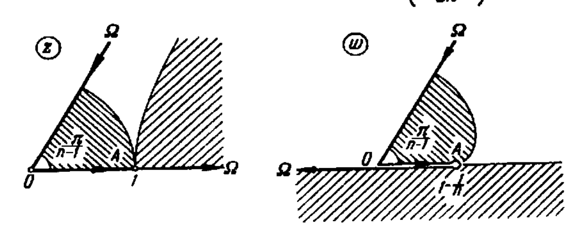


FIG. 75

a los puntos $z_k'=\sqrt[n]{\frac{1}{2n-1}}\,\omega^k$. La transformación principal se indica en la fig. 74. El resto se obtiene mediante la prolongación según el principio de simetría. **1136.** La superficie para $z(w)$ es de n hojas con un punto de ramificación de orden $n-1$ sobre $w=\infty$, correspondiente a $z=\infty$, y con $n-1$

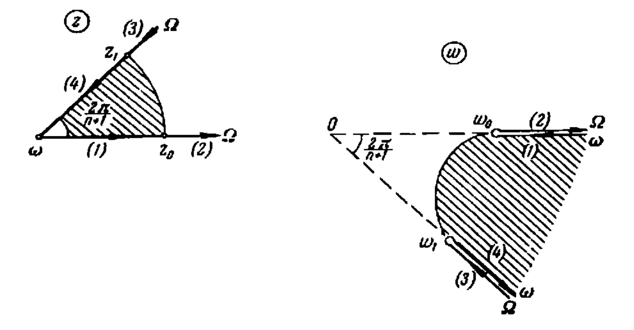


FIG. 76

puntos de ramificación de primer orden situados sobre $w_k=z_k\left(1-\frac{1}{n}\right)$ y correspondientes a $z_k=\omega^k$ $\left(\omega=e^{\frac{2\pi i}{n-1}},\ k=0, 1, \ldots, n-2\right)$. Para construir la superficie es preciso a su hoja cero (el w—plano con $n-1$ cortes radiales que salen del punto w_k) pegar en cruz a lo largo de cada corte una hoja (el w—plano con un corte radial). La transformación principal se indica en la fig. 75. Al círculo $|z|<1$ le corresponde el interior de una epicicloide (de una cardioide

para $n=2$). **1137.** La superficie para $z(w)$ es de $n+1$ hojas con un punto de ramificación de orden $n-1$ sobre $w=\infty$, correspondiente a $z=\infty$, y con $n+1$ puntos de ramificación de primer orden situados sobre $w_k=\bar{z}_k\left(1+\frac{1}{n}\right)$ y correspondientes a $z_k=\omega^k\left(\omega=e^{\frac{2\pi i}{n+1}},\ k=0, 1, \ldots, n\right)$. La transformación principal se indica en la fig. 76. Al recinto $|z|<1$ le corresponde el exterior de una hipocicloide (de un segmento para $n=1$). **1138.** La superficie para $z(w)$ es de n hojas con un punto de ramificación de orden $n-1$ sobre $w=\infty$, correspondiente a $z=\infty$, y con $n-1$ puntos de ramificación de primer orden, situados sobre $w_k=\frac{(-1)^k}{2^{n-1}}$ y correspondientes a $z_k=\cos\frac{k\pi}{n}$ $\left(k=1, 2, \ldots, n-1\right)$. Para construir la superficie es preciso pegar a su hoja cero $\left(\text{el } w-\text{plano con el corte}\right.$

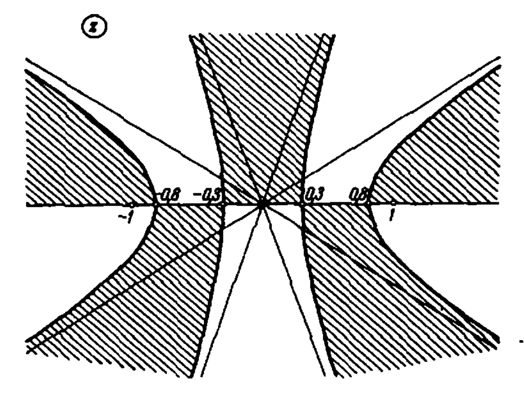


FIG. 77

$\left.-\infty<u\leqslant-\frac{1}{2^{n-1}},\ v=0\right)$ sucesivamente $n-2$ hojas con dos cortes $\frac{1}{2^{n-1}}\leqslant\leqslant|u|<\infty$, $v=0$ y después pegar a la última de ellas una hoja más con el corte $-\infty<u\leqslant-\frac{1}{2^{n-1}}$, $v=0$, si n es un número par, y con el corte $\frac{1}{2^{n-1}}\leqslant u<\infty$, $v=0$, si n es un número impar. La transformación $w(z)$ transforma las elipses e hipérbolas de focos ± 1 en elipses e hipérbolas de focos $\pm\frac{1}{2^{n-1}}$. El cambio de los semiejes se obtiene de las relaciones $z=\text{const}$, $w=\text{const}$. En la fig. 77 se indica la división del z-plano en recintos correspondientes a los semiplanos $v>0$ y $v<0$ (los primeros se han sombreado) para $n=5$. **1139.** $w=0$ y $w=\infty$ son p. l. r. y $w=1$ es un polo de primer orden para una de las ramas de la función $z(w)$. **1140.** La función $z(w)$ tiene un p. a. r. de primer orden sobre los puntos $w=e^{\pm 2i}$ y dos p. l. r. sobre $w=0$ y $w=\infty$. Su superficie de Riemann se obtiene pegando dos ejemplares de la superficie de Riemann para la función Ln w a lo largo del corte hecho en ellos sobre el arco que une los puntos $w=e^{\pm 2i}$ del w—plano. **1141.** La función $z(w)$ tiene un conjunto infinito de p. a. r. de primer orden sobre $w=\pm\sqrt{2}$ y dos p. l. r. sobre $w=\infty$. **1142.** La función

$z(w)$ tiene un p. a. r. de primer orden sobre los puntos $w_k = \frac{\operatorname{sen} z_k}{z_k}$ (z_k son las raíces de la ecuación $\operatorname{tg} z = z$; todas ellas son reales), dos p. l. r. sobre $w = \infty$ y una singularidad crítica indirecta sobre $w = 0$, que es el punto de acumulación de los p. a. r. indicados (véase *Nevanlinna R.*, Eindeutige analytische Funktionen, Springer, Berlin, 1953, n° 238). **1143.** $z = \operatorname{Arccos} w = \frac{1}{i} \operatorname{Ln}(w + \sqrt{w^2 - 1})$. La superficie para $z(w)$ es de infinitas hojas con dos p. l. r. sobre $w = \infty$ y p. a. r. de primer orden sobre $w = \pm 1$, que corresponden a $z = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$); se obtiene pegando un número infinito de w—planos con cortes $1 \leqslant |u| < \infty$, $v = 0$, que corresponden a las franjas verticales $k\pi < x < (k+1)\pi$ (fig. 78). **1144.** $z = \operatorname{Arcsen} w = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arccos} w$. La superficie para $z(w)$ es la misma que para $\operatorname{Arccos} w$. **1145.** $z = \operatorname{Arctg} w = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{i - w}{i + w}$

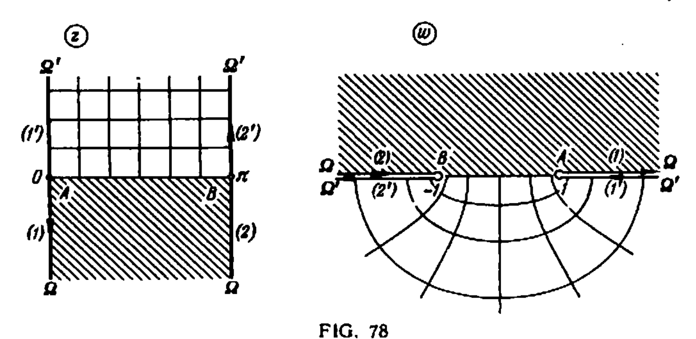


FIG. 78

La superficie para $z(w)$ es de infinitas hojas con dos p. l. r. sobre $w = \pm i$; se obtiene pegando un número infinito de w-planos con cortes $u = 0$, $|v| \leqslant 1$, que corresponden a las franjas verticales $k\pi < x < (k+1)\pi$ (fig. 79). **1146.** $z = \operatorname{Arcctg} w = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctg} w$. La superficie para $z(w)$ es la misma que para $\operatorname{Arctg} w$. **1147.** $z = \operatorname{Arch} w = \operatorname{Ln}(w + \sqrt{w^2 - 1})$; $\operatorname{ch} z = \cos iz$. La superficie para $z(w)$ es la misma que para $\operatorname{Arccos} w$. **1148.** $z = \operatorname{Arsh} w = \operatorname{Ln}(w + \sqrt{w^2 + 1})$; $\operatorname{sh} z = -i \operatorname{sen} iz$. La superficie para $z(w)$ se obtiene girando la anterior en un ángulo de $\frac{\pi}{2}$ alrededor del origen de coordenadas. **1149.** $z = \operatorname{Arth} w = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + w}{1 - w}$; $\operatorname{th} z = -i \operatorname{tg} iz$. La superficie para $z(w)$ se obtiene girando la superficie para $\operatorname{Arctg} w$ en un ángulo de $\frac{\pi}{2}$ alrededor del origen de coordenadas. **1150.** $z = \operatorname{Arcth} w = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{w + 1}{w - 1}$; $\operatorname{cth} z = i \operatorname{ctg} iz$. La superficie para $z(w)$ es la misma que para $\operatorname{Arth} w$. **1151.** La superficie para $z(w)$ se construye como sigue: en el w—plano se hacen cortes horizontales $-\infty < u \leqslant 1$, $v = (2k+1)\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) y a lo largo de cada uno de ellos se pega un ejemplar del w—plano con un corte (sólo uno) idéntico. La construcción de la superficie para $z(w)$ se basa en que $w(z)$ transforma toda franja $2k\pi < y < (2k+1)\pi$ en la franja $2k\pi < v < (2k+2)\pi$, que lleva el w—plano pegado a lo largo del corte $-1 \leqslant u < \infty$, $v = (2k+1)\pi$ (véase la fig. 80; el signo "+" indica que los recintos deben ser

pegados). **1152.** 1) Sea F la superficie de Riemann en la que la función $w=R(\zeta)$ transforma el ζ—plano. Para construir la superficie de Riemann de la función $z(w)$ es preciso pegar una cantidad infinita de ejemplares de la superficie F con un corte a lo largo de un arco que une, sobre F, los puntos $w(0)$ y $w(\infty)$ (aná-

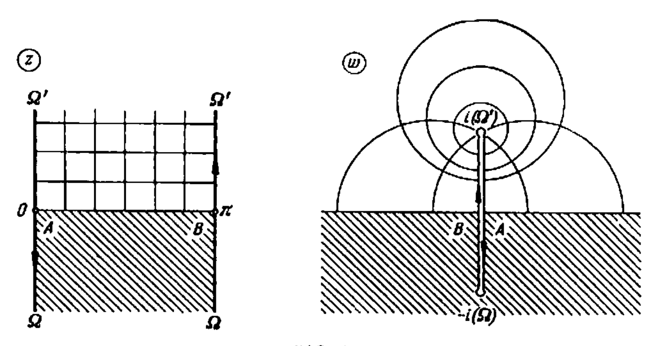


FIG. 79

logamente a la construcción de la superficie de Riemann de la función $\operatorname{Ln} w$). La función de Riemann obtenida tiene dos p. l. r. en los extremos del arco de pegadura y una cantidad infinita de p. a. r. pertenecientes a las superficies F. 2) Para construir la superficie de Riemann de la función $z(w)$ pegamos una cantidad infinita de ejemplares de la superficie F alternadamente a lo largo de los

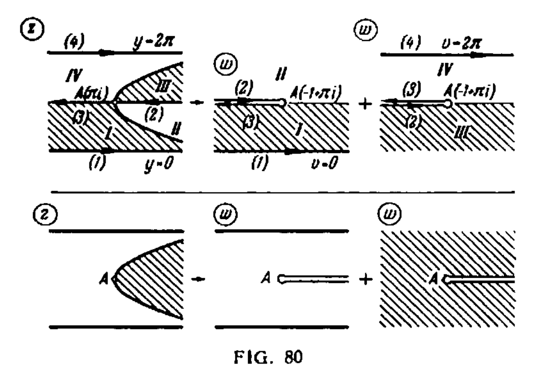


FIG. 80

cortes que van de los puntos $w(\pm 1)$ al punto $w(\infty)$ (análogamente a la construcción de la superficie de Riemann para la función $\operatorname{Arcsen} w$). La superficie de Riemann obtenida tiene dos p. l. r. sobre $w(\infty)$ y además de los p. a. r. del punto 1) tiene una cantidad infinita de p. a. r. de primer orden en los puntos $w(\pm 1)$ (si $w(+1)$ o $w(-1)$ es un p. a. r. de orden k de la superficie F, este punto será para $z(w)$ un p. a. r. de orden $2k+1$). El estudio de la función $z(w)$ se puede reducir al caso anterior realizando la sustitución $z_1=iz$. **1153.** Todas

las superficies de Riemann para $w(z)$ son de dos hojas y tienen p. a. r. de primer orden sobre los puntos: 1) $z=a$, $z=b$; 2) $z=a$, $z=b$, $z=c$, $z=\infty$; 3) $z=a_k$ y $z=\infty$, si n es impar. Para construir las superficies tomamos dos hojas del

FIG. 81

z — plano con cortes, que van de los puntos indicados más arriba al ∞, y los pegamos a lo largo de los cortes idénticos. **1154.** Todas las superficies de Riemann para $w(z)$ son de tres hojas y tienen p. a. r. de segundo orden sobre los puntos: 1) $z=a$, $z=\infty$; 2) $z=a$, $z=b$, $z=\infty$; 3) $z=a$, $z=b$, $z=c$; 4) $z=a_k$

FIG. 82

y $z=\infty$, si n no es múltiple de 3. Para construir las superficies tomamos tres hojas del z — plano con cortes, que van de los puntos indicados al ∞, y definimos sobre las mismas tres ramas uniformes w, ωw, $\omega^2 w$ $\left(\omega=e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)$. Al recorrer

18

los puntos de ramificación la función $w(z)$ adquiere el factor ω a cuenta de uno de los factores subradicales y por eso el orden de pegadura de las hojas a lo largo de todos los cortes es el mismo, el cíclico (véase el esquema de la figura 81). **1155.** La superficie de Riemann para $w(z)$ es de n hojas con p. a. r. de orden $n-1$ sobre $z=a$, $z=b$, $z=c$, $z=\infty$. La superficie se obtiene pegando n hojas del z—plano con cortes que van de los puntos $z=a$, $z=b$, $z=c$ al ∞. La pegadura es cíclica y simultánea a lo largo de todos los cortes. Las hojas corresponden a las ramas uniformes de la función $\omega^k w$ $\left(\omega=e^{\frac{2\pi i}{n}},\ k=0, 1, \ldots, n-1\right)$. **1156.** La superficie de Riemann para $w(z)$ es de seis hojas con un p. a. r. de

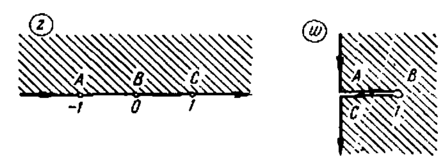


FIG. 83

quinto orden sobre $z=\infty$, con dos p. a. r. de segundo orden sobre cada uno de los puntos $z=a$ y $z=b$ y con tres p. a. r. de primer orden sobre $z=c$. La superficie se obtiene pegando seis hojas del z—plano con un corte a lo largo de la curva que une a y b, b y c, c y el ∞. Estas hojas corresponden a las ramas uniformes w_1+w_2, ωw_1+w_2, $\omega^2 w_1+w_2$, w_1-w_2, ωw_1-w_2, $\omega^2 w_1-w_2$, donde $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ y w_1 y w_2 son las ramas uniformes de $\sqrt[3]{\frac{z-a}{(z-b)^2}}$ y de $\sqrt{z-c}$. Al recorrerse el punto a se unen cíclicamente las hojas 1, 2, 3 y 4, 5, 6, al recorrerse el punto b, las hojas 1, 3, 2 y 4, 6, 5 (la unión es doble a lo largo de las semihojas), al recorrerse el punto c, las semihojas 1, 2, 4, 5 (se indica en la

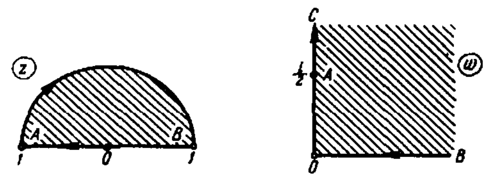


FIG. 84

fig. 82); 2, 3, 5, 6; 3, 1, 6, 4, y al recorrerse el punto ∞, cíclicamente las hojas 1, 6, 2; 4, 3, 5 (véase el esquema de la fig. 82). **1157.** La superficie de Riemann para $w(z)$ es de seis hojas con dos p. a. r. de segundo orden sobre $z=0$, con un p. a. r. de primer orden sobre $z=1$ y con un p. a. r. de quinto orden sobre $z=\infty$. Para construirla hay que pegar dos ejemplares de la superficie para la función $\sqrt[3]{z}$, cada uno de los cuales tiene en una de las hojas un corte a lo largo del rayo $y=0$, $1 \leqslant x < \infty$. **1158.** La superficie de Riemann para $w(z)$ es de dos hojas con p. a. r. de primer orden sobre los puntos $z=k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$); sobre $z=\infty$ la superficie tiene una singularidad trascendente que es el límite de los p. a. r. Para construir la superficie tomamos dos hojas del z—plano con cortes que van de los p. a. r. al ∞ (a lo largo, por ejemplo, de los rayos paralelos al eje imaginario) y pegamos las hojas a lo

largo de los cortes idénticos. **1159**[1]. F_z y F_w se obtienen cada una pegando dos planos con cortes $[-1, 1]$ (fig. 83). **1160.** F_z se obtiene pegando dos z—planos con cortes $-\infty < x \leq 0$, $y=0$ y F_w se obtiene pegando dos w—planos con cortes $\left[-\frac{i}{2}, \frac{i}{2}\right]$ (fig. 84). **1161.** F_z y F_w se obtienen cada una pegando tres planos con cortes en orden cíclico a lo largo de dos de los segmentos

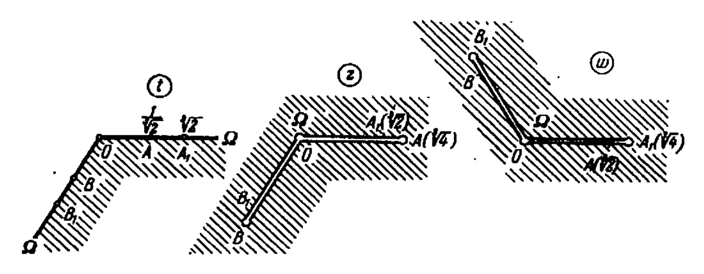


FIG. 85

$[0, \sqrt[3]{4}]$, $[0, \omega\sqrt[3]{4}]$, $[0, \omega^2\sqrt[3]{4}]$, donde $\omega=e^{\frac{2\pi i}{3}}$ (fig. 85). **1162.** F_z se obtiene pegando dos z—planos con cortes $\left[0, \frac{3}{2}\right]$ y F_w se obtiene pegando al w—plano con cortes γ_1: $\left[i\frac{3\sqrt{3}}{2}, +i\infty\right]$, γ_2: $\left[-i\frac{3\sqrt{3}}{2}, -i\infty\right]$ otros dos w—planos con cortes γ_1 y γ_2 respectivamente (fig. 86). **1163.** F_z se obtiene

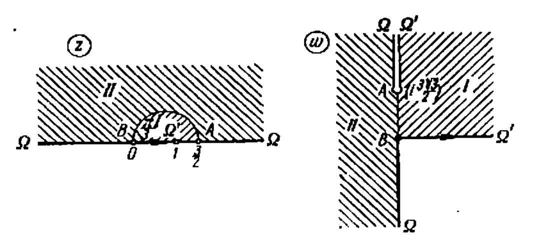


FIG. 86

pegando dos z—planos con cortes $[-1, 1]$ y F_w se obtiene pegando tres w—planos que tienen, respectivamente, un corte $[-ib, ib]$, dos cortes $[-a, a]$ y $[0, ib]$ y dos cortes $[-a, a]$ y $[0, -ib]$, donde $a=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\sqrt{\sqrt{5}-2}$, $b=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\sqrt{\sqrt{5}+2}$. La transformación y los tres w—planos con los cortes

[1] En las respuestas a los problemas **1159—1164** mediante F_w se denota la superficie para $z(w)$, es decir, la superficie sobre el w—plano, y mediante F_z, la superficie para la función $w(z)$ sobre el z—plano.

se indican en la figura 87. (la figura no corresponde a la escala). **1164.** a) n es impar. F_z es de n hojas y tiene n p. a. r. de orden $n-1$ sobre los puntos $z=\omega^k \left(\omega=e^{\frac{\pi i}{n}}, k=1, 2, \ldots, n\right)$; F_w es de $2n$ hojas y tiene n^2 p. a. r. de primer orden: n sobre los puntos $w=\eta^\nu \sqrt[n]{\frac{1}{4}} \left(\eta=e^{\frac{2\pi i}{n}}, \nu=0, 1, 2, \ldots, n-1\right)$,

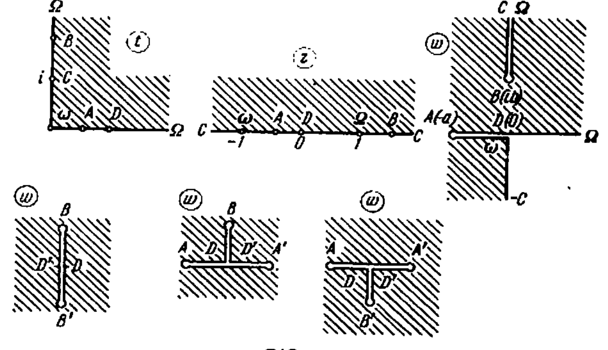


FIG. 87

correspondientes a los puntos de F_z sobre $z=\eta^\nu$, y n p. a. r. de primer orden sobre $w=\infty$, correspondientes a los p. a. r. de F_z sobre $z=\omega^k$. La transformación se indica en la fig. 88 (para el estudio se ha empleado la sustitución $\zeta=z^n$, $W=w^n$). La función $w(z)$ transforma el círculo $|z|<1$ en el w-plano con n cortes radiales que salen de los puntos $\eta^\nu \sqrt[n]{\frac{1}{4}}$. b) n es par. Si $n=2m$,

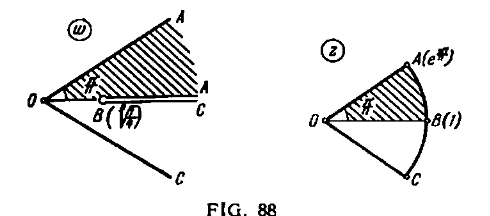


FIG. 88

$w(z)$ se descompone en dos funciones: $w_{1,2}^m = \pm \frac{z^m}{1+z^{2m}}$. Para construir F_z tomamos n "semihojas" $|z|<1$ y n "semihojas" $|z|>1$. Denotémoslas mediante H_k^0 y H_k^+ respectivamente y denotemos mediante γ_k los arcos frontera definidos por los puntos ω^k. A H_k^+ pegamos a lo largo de γ_k las semihojas H_1^0, a lo largo de γ_{k+1} las semihojas H_2^0, a lo largo de γ_{k+2} las semihojas H_3^0, etc., cíclicamente. Con esto queda determinado también el orden de pegadura de F_w, com-

puesta de $2n$ hojas que representan w-planos con n cortes radiales indicados más arriba. **1165.** $w=z^{\frac{2}{3}}$, $z=0$ y $z=\infty$ son p. a. r. de segundo orden. **1166.** $w=z^{\frac{n_1}{m_1}}$ $\left(\frac{n_1}{m_1}\right.$ es la fracción irreducible igual a $\left.\frac{n}{m}\right)$, $z=0$ y $z=\infty$ son p. a. r. de orden m_1-1. **1167.** $z=0$ y $z=\infty$ son p. a. r. de primer orden; $z=1$ es un punto singular esencial para una de las dos ramas de la función. **1168.** $w=1-\frac{z}{3!}+\frac{z^2}{5!}-\ldots$ es una función entera; $z=\infty$ es un punto singular esencial. **1169.** $z=0$ y $z=\infty$ son p. a. r. de primer orden; $z=1$ es un punto singular esencial para una de las dos ramas de la función y es el punto de acumulación de sus polos de primer orden en los puntos $z_k=\left(\frac{1-a_k}{1+a_k}\right)^2$, $a_k=\frac{\pi}{2}+\pi k$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$. Según el problema **618**, el recinto de indeterminación en el punto $z=1$ coincide con todo el plano. **1170.** Si $n=0$, los puntos $z=0$ y $z=\infty$ son puntos singulares evitables y $w\equiv 1$; si $n<0$, los puntos $z=0$ y $z=\infty$ son p. l. r., con la particularidad de que $\lim\limits_{z\to 0} w=\lim\limits_{z\to\infty} w=1$, y $z=1$ es un punto singular esencial para una de las ramas de la función; si $n=1$, se tiene $w=z$; si $n>1$, los puntos $z=0$ y $z=\infty$ son p. l. r. y el recinto de indeterminación de $w(z)$ en estos puntos coincide con el w-plano ampliado. **1171** y **1172.** $z=0$ y $z=\infty$ son p. l. r. y en ellos el recinto de indeterminación de $w(z)$ coincide con el w-plano ampliado. **1173.** $z=1$ y $z=\infty$ son p. l. r., con la particularidad de que $\lim\limits_{z\to 1} w=\lim\limits_{z\to\infty} w=\infty$, y $z=0$ es un polo de primer orden para todas las ramas de $w(z)$, a excepción de una. **1174.** $z=0$ y $z=\infty$ son p. l. r. y $\lim\limits_{z\to 0} w=\lim\limits_{z\to\infty} w=\infty$. **1175.** Los puntos de ramificación son los mismos que tiene el Arcsen z (es decir, un conjunto infinito de p. a. r. de primer orden sobre $z=\pm 1$ y dos p. l. r. sobre $z=\infty$, $\lim\limits_{z\to\infty} w=0$; $z=0$ es un polo de primer orden para todas las ramas, a excepción de una). **1176.** $z=\pm i$ son p. l. r. y $\lim\limits_{z\to\pm i} w=\infty$; $z=0$ es un polo de segundo orden para todas las ramas de la función. **1177.** Las superficies $w(z)$ y $z(w)$ son las mismas que tiene la función logarítmica (con p. l. r. sobre 0 y el ∞). La transformación se obtiene fácilmente empleando la representación paramétrica $z=e^{\zeta}$, $w=e^{a\zeta}$. **1178.** La superficie de Riemann para $w(z)$ es de infinitas hojas con un p. l. r. sobre cada uno de los puntos $z=a$, y $z=b$ y con dos p. l. r. sobre $z=\infty$. La superficie se obtiene pegando un número infinito de hojas del z-plano con cortes que van de los puntos $z=a$ y $z=b$ al ∞. Estas hojas corresponden a las ramas uniformes de la función $w+2\pi i n$ $(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Al recorrer los puntos $z=a$ y $z=b$ estas ramas se transforman sucesivamente una en otra, con lo que queda determinado el carácter de pegadura de las hojas. **1179.** La superficie de Riemann para $w(z)$ es de infinitas hojas con un p. l. r. sobre cada uno de los puntos $z=a$, $z=b$, $z=c$ y con tres p. l. r. sobre $z=\infty$. La construcción es análoga a la anterior. **1180.** La superficie de Riemann para $w(z)$ es de infinitas hojas con un p. l. r. sobre cada uno de los puntos $z=k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. A título de hojas se pueden tomar z-planos con cortes que van de los puntos $z=k\pi$ al ∞ (a lo largo, por ejemplo, de las semirectas verticales). Dos hojas se pegan simultáneamente a lo largo de todos los cortes, por un lado, igual que al construir la superficie de la función logarítmica. En el ∞ se tiene una singularidad trascendental que es el límite de los p. l. r. **1181.** 1) $w(z)$ representa una función analítica única en cada parte conexa de la superficie de Riemann de la función $\zeta=\varphi(z)$ sobre el z-plano, a la que corresponde una parte conexa de la superficie de Riemann de la función inversa $z=\varphi^{-1}(\zeta)$ sobre G_ζ; 2) $w(z)$ representa una función analítica única en cada parte conexa de la superficie de Riemann de la función $\zeta=\varphi(z)$ situada sobre

G_z (es decir, sobre el recinto G_ζ trasladado al z-plano); 3) lo mismo que en el punto 2). En el caso particular, indicado en la condición del problema, $w(z)$ representa siempre una función analítica única. **1182.** $w(z)$ se compone de dos funciones analíticas $\pm z$. **1183.** $w(z)$ se compone de dos funciones analíticas $\pm z^{\frac{2}{3}}$. **1184.** $w(z)$ se compone de p funciones analíticas $\omega^k z^{\frac{m_1}{n_1}}$ $\left(\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}},\right.$ $p = \text{m. c. d.}\ (m, n)$; $k = 0, 1, \ldots, p-1$; $m_1 = \frac{m}{p}$, $\left. n_1 = \frac{n}{p}\right)$. **1185.** $w = (z)$ se compone de n funciones enteras $\omega^k e^{\frac{z}{n}}$ $\left(\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1\right)$. **1186.** $w(z)$ es una función n-valente con p. a. r. de orden $n-1$ sobre $z = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \ldots$). En el ∞ tiene un punto singular no aislado que es el límite de los p. a. r. **1187.** $w = n\operatorname{Ln} z + 2\pi ik$ ($k = 0, 1, \ldots, n-1$); hay n diferentes funciones analíticas. **1188.** $w(z)$ se compone de las funciones $z + 2\pi ik$ ($k = 0, \pm 1, \ldots$). **1189.** Una función infinitamente valente con p. l. r. sobre $z = 0, \pm 1, \infty$. **1190.** $w(z)$ es una función analítica infinitamente valente con un p. l. r. sobre $z_k = 2\pi ik$ ($k = 0, \pm 1, \ldots$). En el ∞ tiene una singularidad no aislada, que es límite de los p. l. r. La superficie de Riemann de la función $w(z)$ es simplemente conexa y se obtiene pegando un número infinito de hojas del w-plano con cortes (sin puntos comunes dos a dos) que van de los puntos z_k al ∞ (dos hojas se pegan a la vez lo largo de todos los cortes, pero por un lado determinado de los mismos). **1191.** La superficie de Riemann es la misma que en el problema **1190**, sólo con p. l. r. sobre $z = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \ldots$). **1192.** La superficie de Riemann es la misma que en el problema **1190**, sólo con p. l. r. sobre $z = \frac{\pi k}{2}$ ($k = 0, \pm 1, \ldots$). **1193.** $w(z)$ se compone de las funciones $\pm z + 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \ldots$). **1194.** $w(z)$ se compone de las funciones $z + k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \ldots$). **1195.** 1) Sean $r_1 = \frac{m_1}{n_1}$, $r_2 = \frac{m_2}{n_2}$, $r = r_1 r_2 = \frac{m}{n}$ fracciones irreducibles y sean $p = \text{m. c. d.}\ (m_1, n_2)$ y $q = \text{m. c. d.}\ (m_2, n_1)$. En estas condiciones, $(z^{r_1})^{r_2}$ se compone de p diferentes funciones analíticas n-valentes, iguales a $\omega^k z^r$, $\omega = e^{\frac{2\pi i}{np}}$, $k = 0, 1, \ldots, p-1$, mientras que $(z^{r_2})^{r_1}$ se compone de q funciones $\omega_1^{k_1} z^r$, $\omega_1 = e^{\frac{2\pi i}{nq}}$, $k_1 = 0, 1, \ldots, q-1$. Una de ellas, a saber z^r, siempre pertenece a ambos casos. En particular, $\left(z^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = \pm z$, $\left(z^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{1}\, z$. 2) Sean $r_1 = \frac{m_1}{n_1}$, $r_2 = \frac{m_2}{n_2}$, $r = r_1 + r_2 = \frac{m}{n}$ fracciones irreducibles y sea $p = \text{m. c. d.}$ (n_1, n_2). En estas condiciones, $z^{r_1} z^{r_2}$ se compone de p diferentes funciones analíticas n-valentes, iguales a $\omega^k z^r$, $\omega = e^{\frac{2\pi i}{np_1}}$, donde $p_1 = \text{m. c. d.}\ (m_1 n_2' + m_2 n_1', p)$, $n_1' = \frac{n_1}{p}$, $n_2' = \frac{n_2}{p}$, $k = 0, 1, \ldots, p_1 - 1$. 3) Sea $p = \text{m. c. d.}\ (n_1, n_2)$ y sea $N = \text{m. c. m.}\ (n_1, n_2) = \frac{n_1 n_2}{p}$. En estas condiciones, $w(z)$ se compone de p diferentes funciones analíticas N-valentes. **1196.** Sean $N = \text{m. c. m.}\ (m, n)$, $p = \text{m. c. d.}$ (m, n), $q = \text{m. c. d.}\ \left(\frac{m+n}{p}, \frac{mn}{p}\right)$ y sea $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{\mu}{\nu}$. En estas condiciones, $w(z)$ es una función analítica N-valente única que tiene $\frac{N}{n}$ p. a. r. de orden $n-1$ sobre $z = 0$, $\frac{N}{m}$ p. a. r. de orden $m-1$ sobre $z = 1$ y $\frac{N}{q}$ p. a. r. de orden

$\nu-1$ sobre $z=\infty$. **1197.** Una función analítica nm-valente que tiene un p. a. r. de orden $n-1$ sobre $z=1$, n p. a. r. de orden $m-1$ sobre $z=0$ y un p. a. r. de orden $mn-1$ sobre $z=\infty$. **1198.** Dos distintas funciones cuadrivalentes que se diferencian por su signo y que tienen la misma superficie de Riemann que la función $\sqrt[4]{z}$. Cada una de estas funciones tiene una rama para la cual el punto $z=1$ es un polo de primer orden. **1199.** Una función infinitamente valente con un p. a. r. de orden $n-1$ sobre $z=1$ y con n p. l. r. sobre cada uno de los puntos $z=0$ y $z=\infty$. Para construir la superficie es preciso pegar n superficies de $\operatorname{Ln} z$ con el corte $[1, \infty)$ en una de las hojas de cada una de ellas.

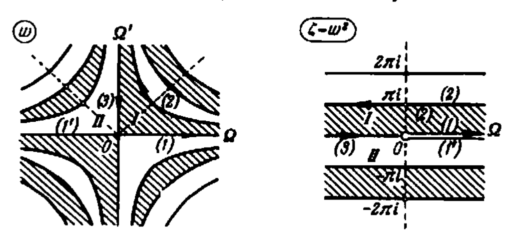


FIG. 89

Las curvas $\rho^n \operatorname{sen} n\theta = k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) dividen el w-plano en recintos correspondientes a los semiplanos $y \lessgtr 0$ (en la fig. 89 se representa el caso $n=2$; $\zeta = w^2$ es un plano auxiliar). **1200.** Una función infinitamente valente con un p. l. r. sobre $z=1$ y con un infinito número de solamente p. l. r. sobre $z=0$ y $z=\infty$. La superficie de Riemann se obtiene pegando un número infinito de superficies de $\operatorname{Ln} z$ con el corte $[1, \infty)$ en una de las hojas. La superficie tiene sobre $z=0$ y $z=\infty$ sólo p. l. r., en cantidad infinita, y sobre $z=1$ tiene puntos singulares y un p. l. r. Las curvas $e^u \operatorname{sen} v = (2k+1)\pi$ y $v = 2k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$)

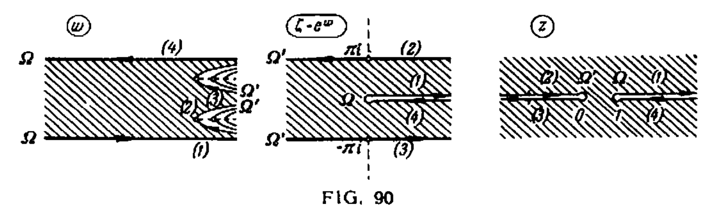


FIG. 90

dividen el w-plano en recintos, correspondientes cada uno al z-plano con el corte $-\infty < x \leqslant 0$, $y=0$ y con el corte adicional $1 \leqslant x < \infty$, $y=0$ para los recintos que comprenden en sus fronteras las rectas $v=2k\pi$ (fig. 90; $\zeta = e^w$ es un plano auxiliar). **1201.** Una función infinitamente valente con la misma superficie de Riemann que $\operatorname{Ln}\operatorname{Ln} z$. **1202.** La superficie de Riemann es de infinitas hojas, tiene un p. a. r. de orden $n-1$ sobre $z=0$, sólo p. a. r. de primer orden sobre $z=\pm 1$ y $2n$ p. l. r. sobre $z=\infty$. Para construir la superficie hay que pegar n superficies para $\operatorname{Arcsen} z$ con el corte $[0, 1]$ en una de las hojas de cada una de ellas. Las curvas $n\theta = \frac{k\pi}{n}$ y $\rho^n \cos n\theta$ ($k=0, \pm 1, \ldots$) dividen el w-plano en recintos correspondientes a los semiplanos $y \lessgtr 0$ (fig. 91, donde $n=2$ y $\zeta = w^2$ es un plano auxiliar). **1203.** La superficie de Riemann se obtiene pegando un número infi-

nito de superficies de $\operatorname{Ln} z$ con los cortes $\left[0, \frac{1}{e}\right]$ y $[e, \infty)$ en una de las hojas (las superficies de $\operatorname{Ln} z$ se pegan dos a dos alternadamente a lo largo de uno y de otro de estos cortes). La superficie tiene sobre $z=0$ y $z=\infty$ un conjunto infinito de p. l. r. y sobre $z=\frac{1}{e}$ y $z=e$ tiene puntos singulares y una cantidad

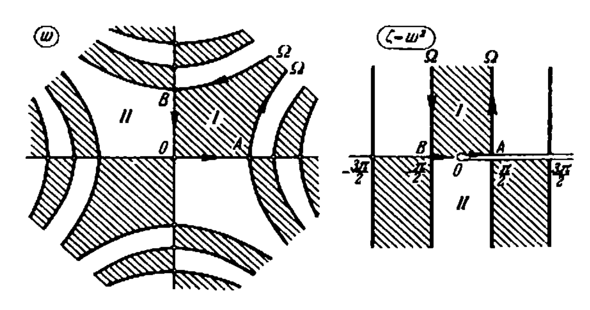


FIG. 91

infinita de p. a. r. de primer orden. Las curvas $\operatorname{Im} \operatorname{sen} w = \cos u \operatorname{sh} v = (2k+1)\pi$ y $u=\frac{\pi}{2}+k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ dividen el w-plano en recintos, correspondientes cada uno al z-plano con el corte $-\infty < x < 0$, $y=0$ y con dos cortes adicionales $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{e}$, $y=0$ y $e \leqslant x < \infty$, $y=0$ en el caso de los recintos, entre cuyas fronteras están comprendidas las rectas $u=\frac{\pi}{2}+k\pi$ (fig. 92; $\zeta=\operatorname{sen} w$ es un plano auxiliar). **1204.** Una función infinitamente valente. Su superficie

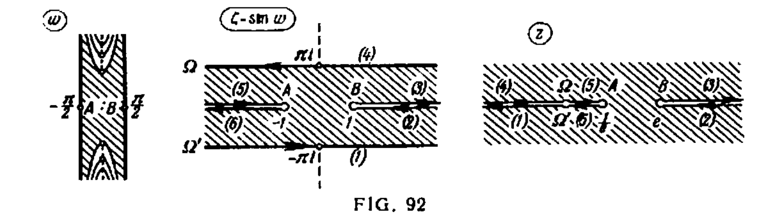


FIG. 92

de Riemann se obtiene pegando un número infinito de ejemplares de la superficie de Riemann para la función $\sqrt[n]{z-1}$, provistos del corte a lo largo del rayo $1 \leqslant x \leqslant \infty$, $y=0$ en una de las hojas. La pegadura se realiza igual que al construir la superficie de Riemann de la función logarítmica. **1205.** Una función infinitamente valente que tiene sólo p. a. r. de primer orden sobre $z=0$ y $z=\infty$ y dos p. l. r. sobre $z=1$. **1206.** Una función infinitamente valente con dos p. l. r. sobre $z=-1$ y con un número infinito de solamente p. a. r. de

primer orden sobre $z=0$ y $z=\infty$. **1207.** Si $\alpha=\frac{m}{n}$, se tiene $w=\frac{m}{n}\operatorname{Ln} z+\frac{2\pi i}{n}k$ $(k=0, 1, \ldots, m-1)$, es decir, m diferentes funciones analíticas; si α es irracional, se tiene $w=\alpha \operatorname{Ln} z+2\pi i k$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$, es decir, un número infinito de diferentes funciones. **1208.** Dos distintas funciones analíticas infinitamente valentes con la misma superficie de Riemann que la de $\operatorname{Ln} z$. **1209.** Dos distintas funciones analíticas iguales, respectivamente, a $2 \operatorname{Ln} z$ y a $2 \operatorname{Ln}(-z)$. **1210.** $w=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k=0, \pm 1, \ldots$, $w=\frac{\pi}{2}+2 \operatorname{Arccos} z$; $w=-\frac{3\pi}{2}+2 \operatorname{Arccos} z$. **1211.** $w=\frac{\pi}{2}+\pi k$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$. **1212.** $w=i\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$. **1213.** w es una función infinitamente valente con la misma superficie de Riemann que la de $\operatorname{Ln}\operatorname{Ln} z$ (véase al problema 1200). Si $\zeta=\rho e^{i\theta}=\operatorname{Ln} z=\ln r+i\varphi$ $(\varphi=\operatorname{Arg} z)$, se tiene $w=e^{i \operatorname{Ln}\zeta}=e^{i(\ln\rho+i\theta+2\pi i k)}$. Para $f_0(z)=e^{-\theta+i\ln\rho}$ $(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$ los conjuntos de valores frontera, indicados en el problema, representan, respectivamente: 1) y 2) la circunferencia $|w|=e^{-\pi}$; 3) las circunferencias $|w|=e^{-\frac{\pi}{2}}$ para $\varphi \to +\infty$ y $|w|=e^{-\frac{3\pi}{2}}$ para $\varphi \to -\infty$; 4) el anillo $e^{-\frac{3\pi}{2}} \leqslant |w| \leqslant e^{-\frac{\pi}{2}}$. Para los demás grupos de ramas se debe agregar el factor $e^{-2\pi k}$ $(k=\pm 1, \pm 2, \ldots)$. **1214.** Si $|a|<1$, $w(z)$ representa en todos los problemas una función analítica; si $|a| \geqslant 1$, la función se descompone en n de diferentes funciones analíticas en los puntos 1) y 3) y en un número infinito de ellas en los puntos 2) y 4). **1215.** Si $|a|<1$, $w(z)$ representa en ambos casos una función analítica; si $|a| \geqslant 1$, habría n de diferentes funciones analíticas en el punto 1) e infinita cantidad de ellas en el punto 2). **1216.** 1) Sean $z=re^{i\varphi}$ y $\zeta=\rho e^{i\theta}=\operatorname{Ln} z$. En estas condiciones, $w(z)$ se compone de funciones analíticas multivalentes iguales, respectivamente, a $\chi(z) e^{i\ln\rho-\theta+2\pi k}$ $(|z|<1$; $\rho=\sqrt{\ln^2 r+\varphi^2}$, $\theta=\arg(\ln r+i\varphi)$, con la particularidad de que $-\infty<\varphi<\infty$ y $\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3\pi}{2}$; $(k=0, \pm 1, \ldots)$. Todas ellas tienen un p. l. r. sobre $z=0$ y en una vecindad de este punto el recinto de indeterminación es un anillo (en particular, el anillo $\chi(0) e^{-\frac{3\pi}{2}} \leqslant |w| \leqslant \chi(0) e^{-\frac{\pi}{2}}$ para $k=0$). 2) Sean $z-1=re^{i\varphi}$ y $\zeta=\rho e^{i\theta}=\operatorname{Ln}(z-1)$. En estas condiciones, $w(z)$ se compone de funciones analíticas uniformes iguales, respectivamente, a $\chi(z) e^{i\ln\rho-\theta+2\pi k}$ $(|z|<1$; $\rho=\sqrt{\ln^2 r+(\varphi+2\pi n)^2}$, $\theta=\arg[\ln r+i(\varphi+2\pi n)]$, con la particularidad de que $\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{3\pi}{2}$, $0<\theta<2\pi$; $(k, n=0, \pm 1, \ldots)$. Para diferentes k y n resultan distintas funciones analíticas. Si existe $\chi(1)=\lim\limits_{z\to 1}\chi(z)$, el recinto de indeterminación para $z \to 1$ es una circunferencia (en particular, la circunferencia $|w|=\chi(1)e^{-\pi}$, si $k=n=0$). **1217.** 1) Si $f(z)$ no tiene ceros de orden impar. $\sqrt{f(z)}$ se descompone en dos funciones enteras. Si $a_1, a_2, \ldots$ son los ceros de orden impar de la función $f(z)$, la superficie de Riemann para $\sqrt{f(z)}$ es de dos hojas con p. a. r. sobre $a_1, a_2, \ldots$ y sobre el ∞, si $f(z)$ tiene allí un polo de orden impar. Si $f(z)$ es una función trascendente, sobre $z=\infty$ hay *dos* puntos singulares esenciales de carácter uniforme, cuando $f(z)$ tiene un número par de ceros de orden impar, y *un punto* singular esencial de carácter bivalente, cuando el número de estos ceros es impar o infinito. 2) Si la función $f(z)$ tiene ceros $a_1, a_2, \ldots$, la superficie de Riemann para $\operatorname{Ln} f(z)$ tiene sobre a_1, a_2 un p. l. r. y ningún otro punto. Si $f(z)$ no tiene ceros, $\operatorname{Ln} f(z)$ se descompone en un número infinito de funciones enteras que difieren una de la otra en sumandos de

tipo $2\pi ki$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). 3) Si $f(z)$ tiene ceros, la superficie de Riemann para $|f(z)|^{\alpha}$ es la misma que para $\operatorname{Ln} f(z)$ (véase el punto 2). Si $f(z)$ no tiene ceros, $|f(z)|^{\alpha}$ se descompone en un número infinito de funciones enteras que difieren una de la otra en factores de tipo $e^{2\pi k\alpha i}$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). **1218.** El círculo $|z|<1$ de dos hojas con p. a. r. en los ceros de la función $\sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}$ y, en particular, en el punto $z=0$. **1219.** 1) El círculo $|z|<1$ de dos hojas con un único punto de ramificación para $z=0$ (parte de la superficie de Riemann para $\sqrt{z}$, situada sobre el círculo $|z|<1$); 2) parte de la superficie de Riemann para la función $\operatorname{Ln} z$, situada sobre el círculo $|z|<1$; 3) parte de la superficie de Riemann para la función $\operatorname{Ln} z$, situada sobre el anillo $\frac{1}{2}<|z|<2$.

Capítulo IX

1222. 1) En el vértice A_2 se tiene $\alpha_2=0$; 2) en los vértices A_1 y A_2 se tiene $\alpha_1=\alpha_2=0$; 3) en el vértice A_3 se tiene $\alpha_3=0$; 4) en los vértices A_3 y A_4 se tiene $\alpha_3=\alpha_4=-1$; 5) en el vértice A_3 se tiene $\alpha_3=-2$ y en el vértice A_4, $\alpha_4=0$; 6) en los vértices A_2, A_3 y A_4 se tiene $\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=0$; 7) en el vértice A_3, se tiene $\alpha_3=-2$ y en los vértices A_4 y A_6, $\alpha_4=\alpha_6=0$; 8) en el vértice A_3 se tiene $\alpha_3=-2$ y en el vértice A_4, $\alpha_4=\alpha-2$. **1224.** Es necesario y suficiente que $\alpha_k=\frac{1}{n_k}$ (n_k son números naturales o el ∞) y que $\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{n_k}\right)=2$ lo cual es posible sólo para $n=4$, siendo $n_1=n_2=n_3=n_4=2$ (es decir, para el rectángulo), y para $n=3$;

n_1	n_2	n_3	P
1	∞	∞	Una franja
2	2	·	Una semifraja
2	3	6	Un triángulo rectángulo
2	4	4	Un triángulo isósceles rectángulo
3	3	3	Un triángulo equilátero

1225. 1) $w=\frac{h}{\pi}\ln z+a$, $z=e^{\frac{\pi(w-a)}{h}}$ (a es un parámetro real); $z(w)$ es una función periódica de período $\omega=2hi$; el grupo G es generado por la transformación $T(w)=w+\omega$; su recinto fundamental B se compone de la franja duplicada y de uno de sus lados frontera; 2) $w=\frac{h}{\pi}\ln\frac{1+z}{1-z}+a$, $z=\operatorname{th}\frac{\pi(w-a)}{2h}$ (a es un parámetro real); $z(w)$ es una función periódica de período $\omega=2hi$; el grupo G y su recinto fundamental B son los mismos que en el punto 1. **1226.** $w=\arcsen z$, $z=\operatorname{sen} w$; $z(w)$ es una función periódica de período $\omega=2\pi$; el grupo G es generado por las transformaciones $T(w)=w+\omega$ y $S(w)=-w$; su recinto fundamental B consta de la franja $0<u<\pi$ y de las semirectas frontera $u=0$, $u=\pi$,

$v \leqslant 0$. 1227[1]. 1) $w = C\int_0^z z^{-\frac{5}{6}}(1-z)^{-\frac{1}{2}}\,dz$, donde $C = \dfrac{\omega}{B\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right)}$ $\Big(B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$ es la integral de Euler de primera especie$\Big)$; $z(w)$ es una función doblemente periodica de periodos 2ω y $2\omega e^{\frac{2\pi i}{3}}$; el grupo G es generado por las transformaciones $T(w) = w + 2\omega$ y $S(w) = we^{\frac{2\pi i}{6}}$; su recinto fundamental B consta de un triángulo duplicado y de dos lados frontera distintos; 2) $w = C\int_0^z z^{-\frac{3}{4}}(1-z)^{-\frac{1}{2}}\,dz$, donde $C = \dfrac{\omega}{B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)}$; $z(w)$ es una función doblemente periódica de períodos 2ω y $2\omega i$; el grupo G es generado por las transformaciones $T(w) = w + 2\omega$ y $S(w) = iw$; su recinto fundamental B consta del cuadrado de lado ω y de dos lados frontera de uno de los triángulos que componen el cuadrado; 3) $w = C\int_0^z z^{-\frac{2}{3}}(1-z)^{-\frac{2}{3}}\,dz$, donde $C = \dfrac{\omega}{B\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)}$; $z(w)$ es una función doblemente periódica de periodos $2hi$ y $2he^{\frac{\pi i}{6}}$, donde $h = \dfrac{\omega\sqrt{3}}{2}$; el grupo G es generado por las transformaciones $T(w) = w + 2hi$ y $S(w) = we^{\frac{2\pi i}{3}}$; su recinto fundamental B consta del triángulo duplicado y de dos distintos lados frontera. 1228. El "triángulo" con dos vértices en los puntos $w = 0$, $w = d = B(\alpha, \beta)$ y de ángulos $\pi\alpha$, $\pi\beta$ en estos vértices. Si $\alpha + \beta < 1$, el tercer vértice es finito; si $\alpha + \beta \geqslant 1$, el tercer vértice es encuentra en el infinito; si $\alpha + \beta = 1$, se tiene $d = \dfrac{\pi}{\operatorname{sen}\alpha\pi}$ y el "triángulo" toma la forma de una franja oblicua si $\alpha \neq \beta$; en el caso en que $\alpha + \beta = 2$, los lados del "triángulo" que parten de los vértices de la base son paralelos, están orientados en direcciones contrarias y $d = \dfrac{\pi(\alpha - 1)}{\operatorname{sen}\pi(\alpha - 1)}$; si $\alpha = \beta = \dfrac{3}{2}$, el "triángulo" representa el exterior de una franja recta (fig. 93). 2) El "triángulo" con un vértice finito en el punto $w = 0$, de ángulo $\pi\alpha$, y con dos vértices en el ∞. Dos lados del "triángulo" representan rayos, que parten del origen, y el tercer lado es una recta, cuya distancia hasta el origen de coordenadas es igual a $h = \dfrac{\operatorname{sen}\pi\beta}{\beta}\,\dfrac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta)}$. (Acerca de cálculo de la magnitud h, véase el libro de W. Koppenfels y F. Stallamann, N°. 13.2, indicado en la pág. 158). En el caso, en que $\alpha = 1$, se obtiene una franja de anchura π; en el caso, en que $\alpha + \beta = 1$, dos lados son paralelos y $h = \pi$; en el caso, en que $\alpha = 2$, se obtiene un semiplano con un corte a lo largo del semieje real positivo y $h = \dfrac{\operatorname{sen}\pi\beta}{\beta(\beta + 1)}$, en particular, $h = 4$, si $\beta = -\dfrac{1}{2}$, y $h = \pi$, si $\beta = -1$ (véase la fig. 93). 1229. 1) Véase la fig. 94, I; $w_1 \equiv w(1) = -i\pi\left(\dfrac{1}{2} - \lambda\right)$; $w_\lambda \equiv \omega(\lambda)$;

[1] Los esquemas de los recintos fundamentales se indican en la fig. 62. de la pág. 230.

2) véase la fig. 94, 2; $w_\lambda = w(\lambda)$. **1230.** 1) $w = \frac{2}{\pi}\left[\operatorname{arcsen}\sqrt{z} - (1-2z)\sqrt{z-z^2}\right]$; 2) $w = \frac{2}{\pi}\left[\operatorname{arcsen}\sqrt{z} - \sqrt{z-z^2}\right]$; 3) $w = \frac{h}{\pi}\left(\ln\frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}} - 2\sqrt{z}\right) = \frac{2h}{\pi}(\operatorname{arth}\sqrt{z} - \sqrt{z})$; 4) $w = \frac{2h}{\pi}(\operatorname{arctg}\sqrt[4]{z} + \operatorname{arth}\sqrt[4]{z} - 2\sqrt[4]{z})$; 5) $w = ia\left(-\sqrt{z}\,\frac{z-3}{2} - 1\right)$.

1231. 1) $w = -\frac{a}{\pi}\int\limits_1^z \frac{dz}{z^{1-\theta}(z-1)^\theta}$. Si $\theta = \frac{p}{q}$, se tiene $w = \frac{a}{\pi}\sum\limits_{\nu=0}^{q-1} \times \frac{1}{t_\nu^p}\ln\left(1-\frac{t}{t_\nu}\right)$, donde $t = \left(\frac{z-1}{z}\right)^{\frac{1}{q}}$ y $t_\nu = e^{\frac{2\nu\pi i}{q}}$ $(\nu = 0, 1, \ldots, q-1)$.

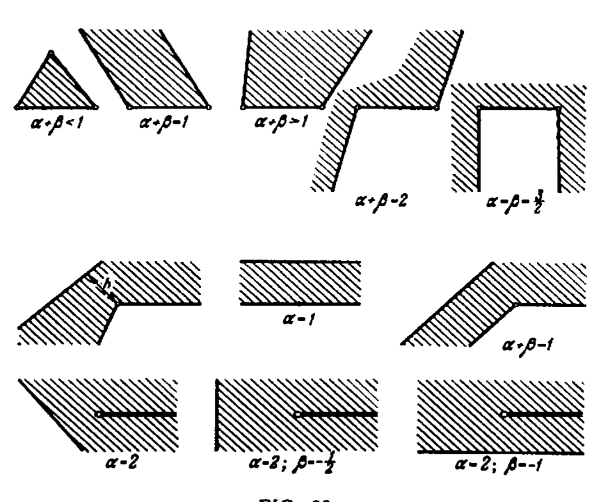


FIG. 93

2) $w = \frac{a}{\pi\theta}\int\limits_1^z \left(\frac{z-1}{z}\right)^\theta dz$. Si $\theta = \frac{p}{q}$, se tiene $w = \frac{a}{\pi}\left[-\frac{t^p}{\theta(t^q-1)} + \sum\limits_{\nu=0}^{q-1} t^p \times \ln\left(1-\frac{t}{t_\nu}\right)\right]$, donde t y t_ν tienen los mismos valores que en el punto 1). **1232.** $w = \frac{a}{\zeta}$, donde $\zeta = \frac{1}{\pi}\left(\frac{2t}{1-t^2} + \ln\frac{1-t}{1+t}\right)$, $t = \sqrt{\frac{z-1}{z}}$. **1233.** $w = \frac{2h}{\pi} \times \left(\sqrt{z^2-1} + \operatorname{arcsen}\frac{1}{z}\right)$. **1234.** $w = \frac{2d}{B\left(\frac{\alpha}{2}, 1-\alpha\right)}\int\limits_0^z t^{\alpha-1}(1-t^2)^{-\alpha}\,dt$.

1235. 1) $w=\frac{2}{\pi}\left(H\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{z}{a-z}}+h\operatorname{arth}\frac{h}{H}\sqrt{\frac{z}{a-z}}\right)$, donde $a=1+\frac{h^2}{H^2}$;
2) $w=\frac{2}{\pi}\left(H\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{a^2-z^2}}+h\operatorname{arth}\frac{h}{H}\frac{z}{\sqrt{a^2-z^2}}\right)$, donde $a^2=1+\frac{h^2}{H^2}$;
3) $w=C\int_0^z\frac{\sqrt{t}\,dt}{(t-1)(t-a)(t+b)}$, donde C, a y b se determinan en las ecuacio-

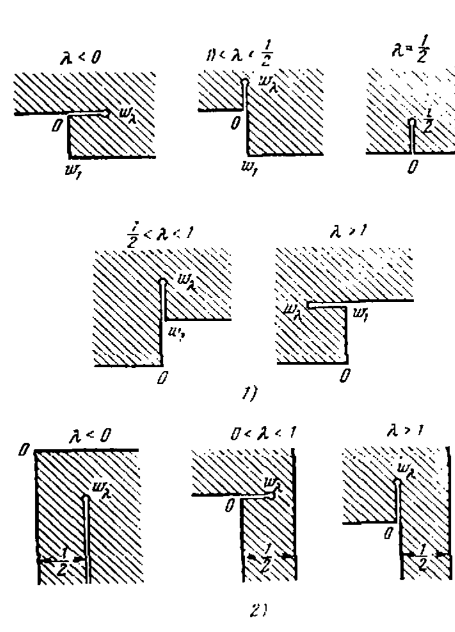


FIG. 94

nes: $\frac{C\pi}{(a-1)(a+b)}=h_1$, $\frac{C\pi\sqrt{a}}{(a-1)(a+b)}=h_2$, $\frac{C\pi\sqrt{b}}{(b+1)(a+b)}=h_3$. **1236.** 1) $w=$
$=\frac{n}{B\left(\frac{1}{n},\,1-\frac{2}{n}\right)}\int_0^z(1-t^n)^{-\frac{2}{n}}\,dt$; 2) $w=C\int_z^1\frac{(1-t^n)^{\frac{2}{n}}}{t^2}\,dt+1$, $c_{-1}=C=$
$=\frac{2^{-\frac{2}{n}}\,n\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}}{B\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}\right)}$. **1237.** 1) $w=\frac{5\cdot 2^{\frac{2}{5}}}{B\left(\frac{1}{10},\,\frac{1}{5}\right)}\int_0^z(1-t^5)^{-\frac{4}{5}}(1+t^5)^{\frac{2}{5}}\,dt$; 2) $w=$

$= C\int_{z}^{1} \frac{(1-t^5)^{\frac{4}{5}}(1+t^5)^{-\frac{2}{5}}}{t^2}\,dt+1$, $c_{-1}=C=\frac{2^{-\frac{3}{5}}\Gamma\left(\frac{7}{10}\right)}{\Gamma\left(\frac{9}{10}\right)\Gamma\left(\frac{4}{5}\right)}$. **1238.** En una estrella poligonal de ángulos $\pi-\frac{2\pi}{n}-\lambda\pi$ y $\pi+\lambda\pi$ alternamente, de centro en el origen de coordenadas y con un vértice del primer tipo de ángulos en el punto $w(1)=\frac{2^{-\frac{2}{n}}}{n}\frac{\Gamma\left(\frac{1-\lambda}{2}-\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{\pi(1+\lambda)}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}}$. **1239.** $w=$
$= CC_0\int_{i}^{z}\left\{z\prod_{k=1}^{m-1}\left(z^2-\operatorname{tg}^2\frac{\pi k}{n}\right)\right\}^{-\frac{2}{n}}dz$, si $n=2m$, y $w=CC_1\int_{i}^{z}\left\{z\prod_{k=1}^{m}\times\right.$
$\left.\times\left(z^2-\operatorname{tg}^2\frac{\pi k}{n}\right)\right\}^{-\frac{2}{n}}dz$, si $n=2m+1$, donde $C=\frac{n}{B\left(\frac{1}{n},\,1-\frac{2}{n}\right)}$, $C_0=$
$=-2i(2n)^{-\frac{2}{n}}e^{-i\frac{\pi}{n}}$ y $C_1=-2i\cdot 2^{-\frac{2}{n}}$. **1240.** Los parámetros se determinan, mediante la ecuación (3) para b_k, de las igualdades $|f(b_k)|=l_k$ $(k=1,\,2,\,\ldots,\,n)$ y de la dirección de uno de los lados de la estrella. Uno de los valores a_k se escoge arbitrariamente. **1241.** $w=\frac{C(z-1)^{3\alpha}(z-1)^{3\alpha-2}}{z}$, $C\frac{h}{4}\alpha^{-3\alpha}(1-\alpha)^{2\alpha-2}$. **1243.** Los parámetros se determinan de los valores de $|f(b_i)|$ y $|f(d_s)|$ que se conocen al indicar P y la dirección de uno de los lados de P. Tres parámetros $(a_k,\ b_i,\ c_j,\ d_s)$ es escogen arbitrariamente. Si uno de los parámetros a_k o c_j es igual al ∞, las relaciones (4) y (5) permanecen válidas si se omite el factor y el sumando correspondiente a este parámetro. Si es igual al ∞ uno de los parámetros b_i o d_s, las relaciones (4) y (5) permanecen sin alterarse.
1245. $w=C(z+1)^{\alpha_1}(z-1)^{\alpha_2}$, $C=h(b+1)^{-\alpha_1}(1-b)^{-\alpha_2}$, $b=\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}$.
1246. $w=C\sqrt{\frac{z^2-a^2}{1-a^2z^2}}$, $C=\sqrt{hH}$, $a=\sqrt{\frac{h}{H}}$. **1247.** $w=Cz^{1-2\alpha}(z^2-1)^{\alpha}$, $C=hb^{2\alpha-1}(1-b^2)^{-\alpha}$, $b=\sqrt{1-2\alpha}$. **1248.** $w=\sqrt{hH}\left(\frac{z+a}{1+az}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{z-b}{1-bz}\right)^{\alpha_2}$, donde a y b se determinan del sistema de ecuaciones $a^{\alpha_1}b^{\alpha_2}=\sqrt{\frac{h}{H}}$, $a^{\alpha_1}b^{\alpha_2}=\sqrt{\frac{h}{H}}$, $\alpha_1\left(\frac{1}{\alpha}-a\right)=\alpha_2\left(\frac{1}{b}-b\right)$. **1249.** 1) $w=[T_n(z)]^{\frac{1}{n}}$, donde $T_n(z)=\frac{1}{2}\left[(z+\sqrt{z^2-1})^n+(z-\sqrt{z^2-1})^n\right]$ son los polinomios de Chébyshev;
2) $w=\left[\frac{T_n'(z)\sqrt{z^2-1}}{n}\right]^{\frac{1}{n}}$. **1250.** Los parámetros se determinan de los valores de $\operatorname{Re} f(b_i)$ y $\operatorname{Re} f(d_s)$ que se conocen al indicar P y la dirección de uno de los lados de P. Tres parámetros $(a_k,\ b_i,\ c_j,\ d_s)$ se escogen arbitrariamente. Si uno de los parámetros a_k o c_j es igual al ∞, las relaciones (6) y (7) permanecen válidas, si se omiten los sumandos correspondientes. Si es igual al ∞ uno de los parámetros b_i o d_s, las relaciones (6) y (7) permanecen sin modificaciones

(véase la respuesta al problema 1243). **1251**. Los parámetros se determinan de los valores de Re $f(b_l)$ y Re $f(d_s)$. Tres de los parámetros a_k, b_l, c_j, d_s se escogen arbitrariamente. En la fórmula (10) se escogen arbitrariamente dos de los parámetros a_k, b_l, c_j, d_s. **1252**. Los parámetros se determinan por los valores de Re $f(b_l)$ y por la posición de uno de los lados de P. Dos parámetros se escogen arbitrariamente. **1253**. Los parámetros se determinan por los valores de Re $f(b_l)$ y Re $f(d_s)$ y por la posición de uno de los lados de P. Tres parámetros se escogen arbitrariamente. En la fórmula (11) se escogen arbitrariamente dos de los parámetros correspondientes a los vértices. **1254**. 1) $w=\frac{h_1}{\pi}\ln(z+1)+$ $+\frac{h_2}{\pi}\ln(z-1)+C$,

$$C=-\frac{h_1}{\pi}\ln(b+1)-\frac{h_2}{\pi}\ln(1-b),\quad b=\frac{h_1-h_2}{h_1+h_2};\quad 2)\quad w=\frac{h_1}{\pi}\ln(z^2-1)+$$
$$+\frac{h_2}{\pi}\ln z+C,$$

$$-C=-\frac{h_1}{\pi}\ln(1-b^2)-\frac{h_2}{\pi}\ln b,\qquad b=\sqrt{\frac{h_2}{2h_1+h_2}};\qquad 3)\quad w=\frac{h_1}{\pi}\ln\frac{z+a_1}{1+a_1z}+$$
$+\frac{h_2}{\pi}\ln\frac{z-a_2}{1-a_2z}$. Los parámetros a_1 y a_2 se determinan de las ecuaciones

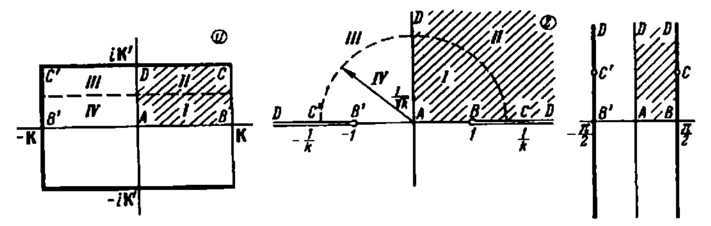


FIG. 95

$a_1^{h_1}a_2^{h_2}=e^{-\pi}$, $h_1\left(\frac{1}{a_1}-a_1\right)=h_2\left(\frac{1}{a_2}-a_2\right)$; 4) $w=f\left[\frac{i}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]$, donde $f(z)$ es la transformación del punto 3); 5) $w=\frac{h}{\pi}\ln T_n(z)$, donde $T_n(z)$ son los polinomios de Chébyshev (véase la respuesta al problema 1249); 6) $w=$ $=\frac{h}{\pi}[\ln(z-1)+z]$; 7) $w=\ln\frac{z+1}{1-z}+Az$, $A=\frac{2}{b^2-1}$, donde b se determina de la ecuación $\ln\frac{b+1}{b-1}+\frac{2b}{b^2-1}=d$; 8) $w=\ln(z+1)-Az^2-z+\text{const}$, donde $A=\frac{1}{2a}$ y a se determina de la ecuación $\ln a+\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{a}\right)+d=0$. En particular, si $d=0$, se tiene $a=1$; 9) $w=\frac{h}{\pi}\ln(z-a)+\frac{C}{z-a}+Az+\text{const}$, donde $A=\frac{h}{2\pi a}$, $C=\frac{h}{2\pi a}(1-a^2)$ y a se determina de la ecuación $\ln\frac{1-a}{1+a}+\frac{2}{a}=\frac{\pi d}{h}$. En particular, si $h=0$, se tiene $a=0$, $A=C=\frac{d}{4}$. **1255**. La correspondencia entre los planos u, z, y φ se indica en la fig. 95. Los afijos de los puntos C

y C' en el plano φ son iguales a $\pm \frac{\pi}{2}+i \ln \frac{1+k'}{k}$. Al segmento punteado del plano u le corresponde en el plano z la circunferencia punteada de radio $1/\sqrt{k}$ (véase, por ejemplo, el libro de H. Bateman y A. Erdélyi, p°. 13.25 mencionado en la pág. 173). **1256.** $w=\lambda \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$, $z=\operatorname{sn}\left(\frac{w}{\lambda}, k\right)$, donde λ y k

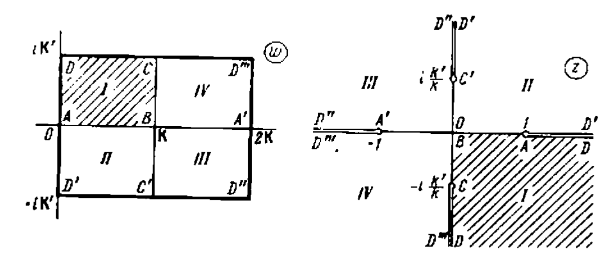


FIG. 96

se determinan de las relaciones $\frac{K'}{K}=\frac{b}{a}$, $a=\lambda K$. **1257.** Véase la figura 96. **1258.** Véase la figura 97. **1259.** La transformación del z-plano en el plano u se indica en la fig. 98 (el v-plano que aparece en esta figura se refiere a la respuesta al problema 1260). **1260.** La correspondencia entre los planos z y w se indica en la figura 98. Las expresiones para l y h se dan en la tabla *I*. (véase la pág. 292).

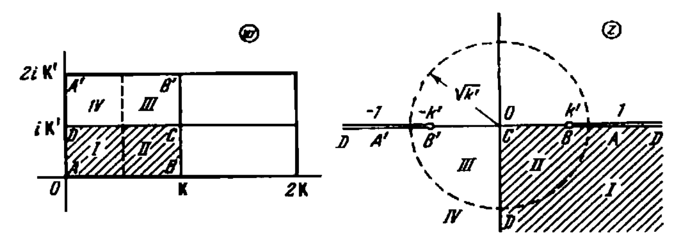


FIG. 97

1261. *Solución.* Para determinar los parámetros C_1, k y b tenemos tres ecuaciones: 1) $w(1)=a$, es decir, $C_1[(k^2b^2-1)K+E]=a$, 2) $w(1)=w\left(\frac{1}{k}\right)$, es decir, $(k^2b^2-1)K+E=(k^2b^2-1)(K+iK')+E+i(K'-E')$ (véase la sugerencia al problema 1260), 3) $w(b)=w(1)=ih$. De la ecuación 2) obtenemos $b=\frac{1}{k}\sqrt{\frac{E'}{K'}}$. Introduciendo esta expresión en la ecuación 1), encontramos $C_1\left[\frac{E'K-KK'+EK'}{K'}\right]=a$, es decir, $C_1=\frac{2aK'}{\pi}$ (véase la fórmula (10) de la pág. 176).

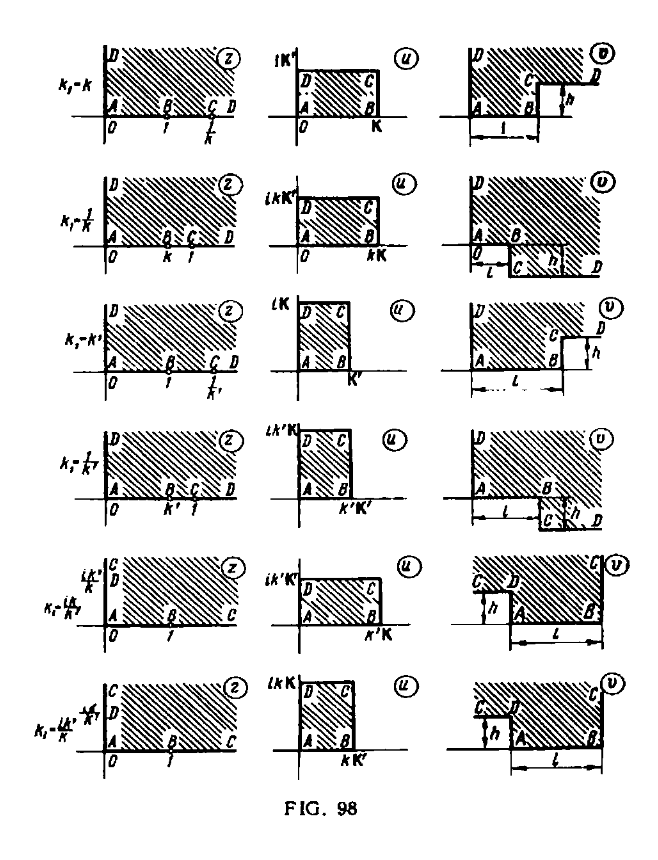


FIG. 98

Tabla I

k_1	l	h
k	E	$K' - E'$
$\frac{1}{k}$	$\frac{1}{k}(E - k'^2 K)$	$\frac{1}{k}(E' - k^2 K')$
k'	E'	$K - E$
$\frac{1}{k'}$	$\frac{1}{k'}(E' - k^2 K')$	$\frac{1}{k'}(E - k'^2 K)$
$\frac{ik}{k'}$	$\frac{1}{k'}E$	$\frac{1}{k'}(K' - E')$
$\frac{ik'}{k}$	$\frac{1}{k}E'$	$\frac{1}{k}(K - E)$

Entonces, para determinar k, obtenemos de 3) la ecuación trascedente $(E'-K')u\left(\frac{1}{k}\sqrt{\frac{E'}{K'}},\ k\right)+K'v\left(\frac{1}{k}\sqrt{\frac{E'}{K'}},\ k\right)=\frac{\pi}{2}(a+ih)$. Los detalles de la solución y los gráficos para la determinación de los parámetros véanse en el

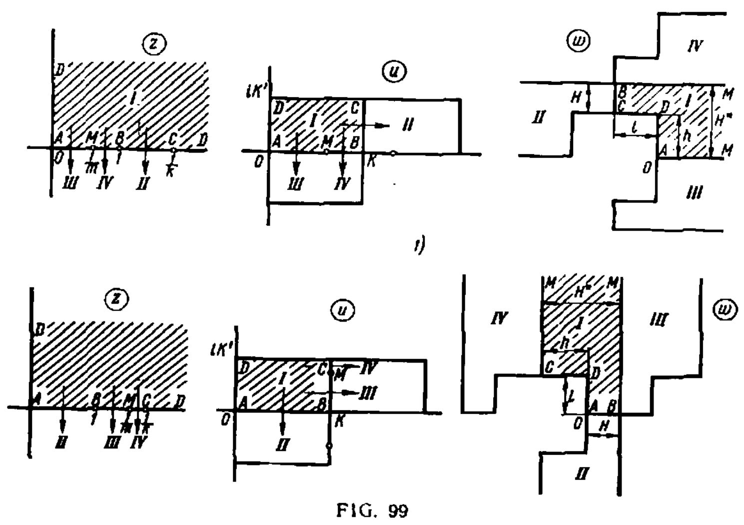


FIG. 99

libro: A. Betz, Konforme Abbildung, Berlin, 1948. 1263. Los casos 1), 2), 3) y 4) están representados, respectivamente, en figuras 99 y 100. En todos los casos para poder hacer comparaciones, se da la transformación en u-plano que realiza la integral elíptica normal de primera especia. La prolongación de la

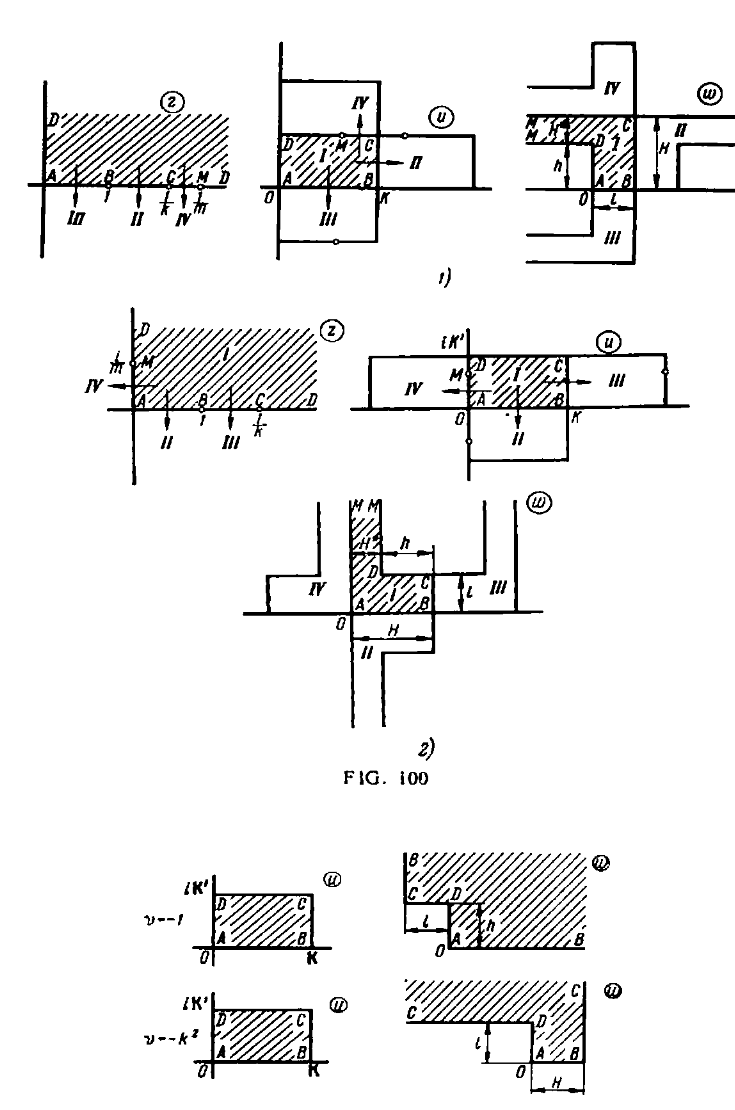


FIG. 100

FIG. 101

transformación del primer cuadrante I del z-plano según el principio de simetría lleva en el w-plano a una franja con una cavidad rectangular (véanse los recintos $I+II$ de la figura 99, 1), 2), a una tranja con un saliente rectangular (véanse los recintos $I+II$ de la figura 100, 1), 2), así como a otros recintos (algunos de los cuales se indican en las figuras). Las dimensiones principales H, l, h que aparecen en estos casos véanse en la tabla II. Observemos que, sustituyendo z por t: $k^2z^2+k'^2t^2=1$, se puede reducir el segundo caso al primero y el cuarto caso, al tercero; solamente en los casos 2) y 4) aparecen entonces en lugar de ν, k las magnitudes $\nu'=-\frac{\nu}{k^2+\nu}k'^2$, k' y las correspondientes w-figuras se obtendrán de las w-figuras de los casos 1) y 3) mediante transformaciones lineales enteras con coeficientes de dilatación

$$\frac{(\text{long})_2}{(\text{long})_1}=-\frac{k^2+\nu}{k^2},\quad \frac{(\text{long})_4}{(\text{long})_3}=\frac{k^2+\nu}{k^2}$$

(los índices corresponden al caso). Para los casos $\nu=-1$ y $\nu=-k^2$ en la figura 101 se da la correspondencia entre el u-plano y el w-plano. Haciendo uso de la tabla II, encontramos para $\nu=-1$:

$$w=\frac{1}{k'^2}\left[k'^2u-E(u)+\frac{\operatorname{sn}u\operatorname{dn}u}{\operatorname{cn}u}\right]=-\frac{i}{k'}E\left(ik'u,\frac{1}{k'}\right)$$

$$l=\frac{1}{k'^2}(\mathrm{E}-k'^2\mathrm{K}),\quad n=\frac{1}{k'^2}(\mathrm{E}'-k^2\mathrm{K}')$$

y para $\nu=-k^2$:

$$w=\frac{1}{k'^2}\left[E(u)-k^2\frac{\operatorname{sn}u\operatorname{cn}u}{dn\,u}\right],$$

$$l=\frac{1}{k'^2}(\mathrm{K}'-\mathrm{E}'),\qquad H=\frac{1}{k'^2}\mathrm{E}.$$

1264. *Solución.* De la condición $\Delta>0$ se desprende que e_1, e_2, e_3 son reales y diferentes y que $g_2>0$. Aceptamos que $e_1>e_2>e_3$. El semiplano superior $\operatorname{Im} z>0$ se transforma en un rectángulo de vértices 0, ω, $\omega-\omega'$, $-\omega'$ $\left(\text{se considera que } \operatorname{Im}\frac{\omega'}{\omega}>0\right)$, correspondientes a los pontos ∞, e_1, e_2, e_3. A las líneas medias del rectángulo corresponden dos semicircunferencias (fig. 102): a primera de centro en el punto e_3 y respecto a ella e_2 y e_1 son simétricos (de modo que su radio es $\sqrt{(e_1-e_3)(e_2-e_3)}$) y la segunda de centro en el punto e_1 y respecto a ella son simétricos e_2 y e_3 (su radio es $\sqrt{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}$). Prolongando la transformación $\wp(w)$ según el princípo de simetría, obtenemos los semiperíodos ω y ω' de esta función:

$$\omega=\int_{e_1}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}},$$

$$\omega'=i\int_{-\infty}^{e_3}\frac{dx}{\sqrt{(e_1-x)(e_2-x)(e_3-x)}}.$$

Considerando la figura 102, encontramos las relaciones

$$\wp(w)=e_3+\frac{e_1-e_3}{\operatorname{sn}^2\left(\frac{\mathrm{K}}{\omega}w,k\right)},\quad k^2=\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}.$$

ν	H^{0}	H	I	h
$\nu < -1$	$\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\lvert\nu\rvert}{\lvert\nu+1\rvert\lvert\nu+k^2\rvert}}$	$-\frac{k^2}{k^2+\nu}\Pi_1(\nu', k')$	$-\Pi_1(\nu, k)$	$H^{0}-H$
$-1 < \nu < -k^2$	$\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\lvert\nu\rvert}{\lvert\nu+1\rvert\lvert\nu+k^2\rvert}}$	$\Pi_1(\nu, k)$	$\frac{k^2}{k^2+\nu}\Pi_1(\nu', k')$	$H^{0}-H$
$-k^2 < \nu < 0$	$\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\lvert\nu\rvert}{\lvert\nu+1\rvert\lvert\nu+k^2\rvert}}$	$\frac{k^2}{k^2+\nu}\Pi_1(\nu', k')$	$\Pi_1(\nu, k)$	$H-H^{0}$
$\nu > 0$	$\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\lvert\nu\rvert}{\lvert\nu+1\rvert\lvert\nu+k^2\rvert}}$	$\Pi_1(\nu, k)$	$\frac{k^2}{k^2+\nu}\Pi_1(\nu', k')$	$H-H^{0}$
$\nu=-1$	–	–	$\frac{1}{k'^2}(E-k'^2K)$	$\frac{1}{k'^2}(E'-k^2K')$
$\nu=-k^2$	–	$\frac{1}{k'^2}E$	$\frac{1}{k'^2}(K'-E')$	–

Observación. En la columna <I> las integrales se entienden en el sentido del valor principal. Además

$$\nu' = -\frac{\nu}{k^2+\nu}k'^2.$$

Si $g_3 > 0$, se tiene $e_3 < e_2 < 0 < e_1$ y $\omega < |\omega'|$ (ya que $k < k'$ y, por consiguiente, $K < K'$); si $g_3 < 0$, se tiene $e_3 < 0 < e_2 < e_1$ y, por consiguiente, $\omega > |\omega'|$. Si $g_3 = 0$, se tiene $e_2 = 0$, $e_3 = -e_1$ y $\omega = |\omega'|$. En este caso la transformación es simétrica además respecto al eje vertical. A todo el z-plano con cortes $(-\infty, e_3]$, $[e_1, \infty)$, $[0, i\,\infty)$ le corresponde el triángulo $(0, 2\omega, 2\omega')$,

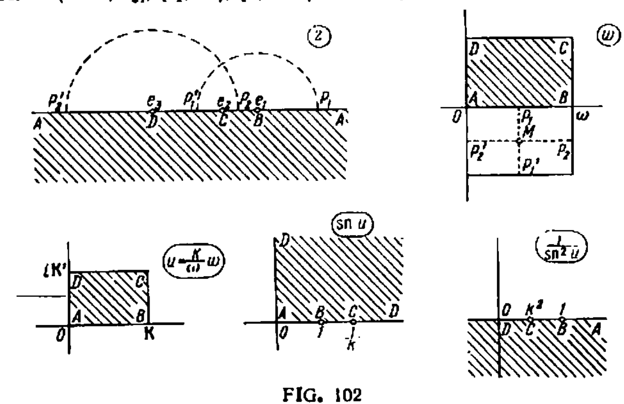


FIG. 102

que forma la mitad del paralelogramo de periodos (que se ha convertido ahora en un cuadrado) (fig. 103). Observemos también que, siendo e_1, e_2, e_3 $(e_1+e_2+e_3=0)$ arbitrarios, a la mitad del paralelogramo de periodos le corresponde el z-plano con cortes, en general curvilíneos, que salen de e_1, e_2, e_3 y van

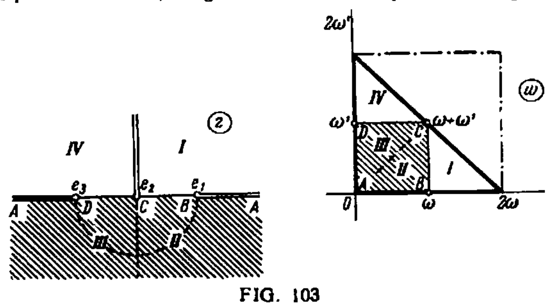


FIG. 103

al ∞ (véase esquema de la fig. 104). **1265.** *Solución.* La transformación principal se indica en la fig. 105. Se obtiene de la transformación del semicírculo II aplicando el principio de simetría. Observando que $dw = \dfrac{dz}{-\sqrt{(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}}$ y tomando $\operatorname{Arg}(-1) = \pm\pi$, obtenemos $\operatorname{Arg} dw = \pm\pi + \operatorname{Arg} dz - \dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{3} \operatorname{Arg}(z-e_k)$, de donde se desprende que $\operatorname{Arg} dw$ toma en los lados del

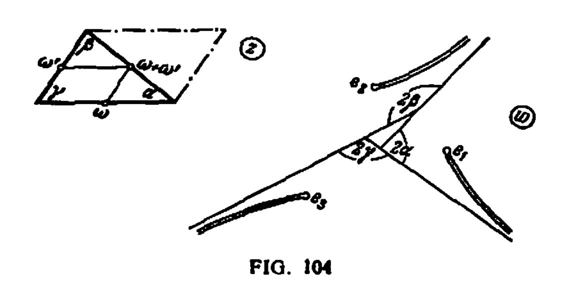


FIG. 104

FIG. 105

"rectángulo" $PBMC$ los valores $-\frac{\pi}{2}$, 0, $\frac{\pi}{2}$, $-\pi$, respectivamente y esto lleva a la transformación indicada en la figura 105. Así, por ejemplo, sobre el arco $\widetilde{PB}$ tenemos (fig. 106) $\arg dw = -\pi + \left(\alpha_2 + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}(-\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = -\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3}{2} = -\frac{\pi}{2}$, etc. Para determinar los semiperíodos conjugados ω y ω' de la función $\wp(\omega)$ tenemos:

$$\omega + \omega' = \int_{e_1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}},$$

$$\omega - \omega' = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{e_3} \frac{dx}{\sqrt{(e_1-x)(e_2-x)(e_3-x)}}.$$

Si $g = 0$, resulta que e_1, e_2, e_3 son vértices de un triángulo equilátero y que el paralelogramo de períodos tiene la forma de un rombo de ángulo 60° en el cero,

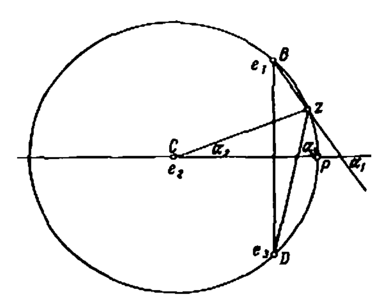


FIG. 106

si $g_3 < 0$ (en *este caso* $e_2 < 0$), y *de ángulo* 120° *en el cero, si* $g_3 > 0$ (*en este* caso $e_2 > 0$). En ambos casos la mitad del paralelogramo de períodos corresponde al z-plano con cortes simétricos radiales que salen de los puntos e_1, e_2, e_3 (*véanse las figuras* 107 y 108). **1266.** 1) $w = -\left[\frac{\wp(z)}{e_1}\right]^2$, *los semiperíodos* son ω, $i\omega$; 2) $w = \frac{\wp'(z)}{2|e_2|^{\frac{3}{2}}}$, los semiperíodos son $\omega = he^{-i\frac{\pi}{4}}$ y $\omega' = he^{i\frac{\pi}{4}}$, donde $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; 3) $w = \frac{\wp'^2(z)}{4e_2^3}$, los semiperíodos son los mismos que en el punto 2).

1267. 1) $z = \operatorname{sn}(u, k)$ $w = e^{\frac{\pi u}{K'}}$, $\ln \mu = 2\pi \frac{K}{K'}$; $|\operatorname{Re} u| < K$, $|\operatorname{Im} u| < K'$; 2) la transformación es la misma que en el punto 1), pero $0 < \operatorname{Re} u < K$, $|\operatorname{Im} u| < K'$, $\ln \mu = \pi \frac{K}{K'}$; 3) se reduce al punto 1) *mediante una transforma-*

ción lineal; en este caso, $k=\frac{\sqrt{\lambda}-\sqrt{\lambda-1}}{\sqrt{\lambda}+\sqrt{\lambda-1}}$, donde $\lambda=(a, b, c, d)$ es la razón anarmónica de los puntos indicados; 4) se reduce al punto 3) mediante la transformación $t=\sqrt{z^2+h^2}$; 5) $z=\operatorname{sn}(u, k)$, $w=ie^{\frac{i\pi u}{2K}}$, $\ln\mu=\frac{\pi}{2}\frac{K'}{K}$; $-3K<$

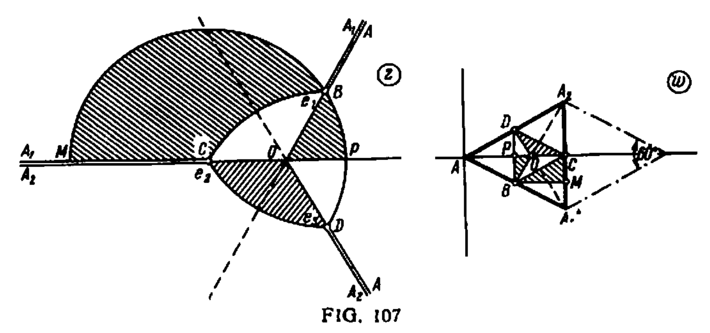


FIG. 107

$<\operatorname{Re} u<K$, $0<\operatorname{Im} u<K'$; 6) se reduce al punto 5) mediante la transformación $t=\sqrt{1+z^2}$; en este caso, $k=\cos\alpha$; 7) la transformación es la misma que en el punto 5), solamente en un caso es $0<\operatorname{Im} u<\frac{1}{2}K'$, y en el otro

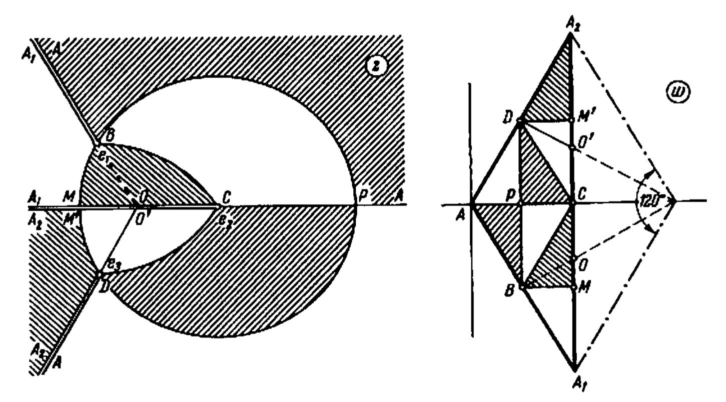


FIG. 108

se tiene $\frac{1}{2}K'<\operatorname{Im} u<K'$; $\ln\mu=\frac{\pi}{4}\frac{K'}{K}$; 8) $z=k\operatorname{sn}^2(u, k)$, $w=e^{-i\frac{\pi u}{K}}$, $\ln\mu=\pi\frac{K'}{K}$; $|\operatorname{Re} u|<K$, $0<\operatorname{Im} u<K'$; 9) la transformación es la misma

que en el punto 8), solamente en un caso se tiene $0 < \operatorname{Im} u < \frac{1}{2}K'$, y en el otro caso se tiene $\frac{1}{2}K' < \operatorname{Im} u < K'$; $\ln \mu = \frac{\pi}{2}\frac{K'}{K}$; 10) se reduce al punto 8) mediante la transformación $t = \frac{z+1}{\sqrt{1+\rho}}$; en este caso, $k = \frac{1}{\sqrt{1+\rho}}$; 11) se reduce al punto 7) mediante la transformación $t = \frac{1-z}{1+z}$; en este caso, $k = \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$; 12) se reduce al punto 2) mediante la transformación $t = -i \operatorname{sen} z$; en este caso, $k = \frac{\operatorname{sh} H_1}{\operatorname{sh} H_2}$; 13) se reduce al punto 7) mediante la transformación $t = \operatorname{sen} z$; en este caso, $k = \cos \operatorname{th} H$; 14) se reduce al punto 5) mediante la transformación $t = \operatorname{sen} z$ y una transformación lineal sucesiva; en este caso, $k = \frac{\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda - 1}}{\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda - 1}}$, donde $\lambda = \frac{(1 + \operatorname{sen}\beta)(1 - \operatorname{sen}\alpha)}{2(\operatorname{sen}\beta - \operatorname{sen}\alpha)}$, 15) $z = C\left[Z(u) + \frac{\operatorname{dn} u \operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u}\right]$, $w = e^{-i\frac{u\pi}{K}}$, $\ln \mu = 2\pi\frac{K'}{K}$, donde k se determina de las ecuaciones $Z(\beta)\operatorname{tg}\alpha = \frac{\pi}{2K}$, $\operatorname{dn}^2\beta = \frac{E}{K}$. **1268.** $t = \frac{1 - \operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u}$. Los vértices $K \pm iK'$, $-K \pm iK'$ se transforman en los puntos $e^{\pm i\alpha}$, $-e^{\pm i\alpha}$ donde $\cos\alpha = k$. **1269.** Se reduce al problema **1268** mediante la transformación $u = \frac{2K}{\pi}\operatorname{arcsen} z$. En este caso, k se determina de las ecuaciones $q = e^{-\pi\frac{K'}{K}} = \frac{1}{(a+b)^4}$, donde $b = \sqrt{a^2 - 1}$. **1270.** $t = \frac{1 - \operatorname{dn} u}{k \operatorname{sn} u}$, donde $u = \frac{2K}{\pi}\operatorname{arcsen} z$, $|\operatorname{Re} u| < K_1$, $|\operatorname{Im} u| < K'$. El parámetro k tiene el mismo valor que en la respuesta al problema **1269.** Los focos $z = \pm 1$ se transforman en los puntos $\pm\frac{k}{1+k'}$. **1271.** 1) $z = C\left[Z(u) + \frac{\operatorname{dn} u \operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u}\right]$, $t = \frac{1 + \operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u}$; 2) $z = C\left[Z(u) + \frac{\pi u}{2KK'}\right]$, $t = \frac{1 + \operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u}$; 3) $z = \frac{a}{hk}\left[E(u) - i(E' - k^2K') - k'^2u + \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u}\right]$. Sobre la determinación de las constantes véase el libro mencionado en la respuesta al problema **1261.**

Capítulo X

1272. Un movimiento de traslación de velocidad $V = \alpha - i\beta$. En el ∞ se tiene un doblete de momento $p = 2\pi c$. Las líneas de corriente son $\beta x + \alpha y = C$; las líneas equipotenciales son $\alpha x - \beta y = C$. **1273.** En el punto $z = 0$ se tiene un punto crítico (punto de ramificación) y en el ∞, un multiplete de orden $2n$ (que también es un punto de ramificación); las líneas equipotenciales son $r^n \cos n\varphi = C$ y las líneas de corriente, $r^n \operatorname{sen} n\varphi = C$ $(z = re^{i\varphi})$; $V = \overline{nz^{n-1}}$. **1274.** En los puntos $z = 0$ y $z = \infty$ se tienen manantiales-torbellinos: $(0; Q, \Gamma)$, $(\infty; -Q, -\Gamma)$; las líneas equipotenciales son $\ln r = -\frac{\Gamma}{Q}\varphi + C$ y las líneas de corriente, $\ln r = \frac{Q}{\Gamma}\varphi + C$. Ambas familias de líneas representan espirales logarítmicas;

en los casos en que $\Gamma=0$ o $Q=0$, una de estas familias son las circunferencias $r=C$ y la otra, los rayos $\varphi=C$. La velocidad es $V=\frac{|\Gamma+iQ|}{2\pi r}e^{i\left(\varphi-\operatorname{arctg}\frac{Q}{\Gamma}+\frac{\pi}{2}\right)}\times$ $\times(z=re^{i\varphi})$. **1275.** En los puntos a y b se tienen manantiales-torbellinos: (a;

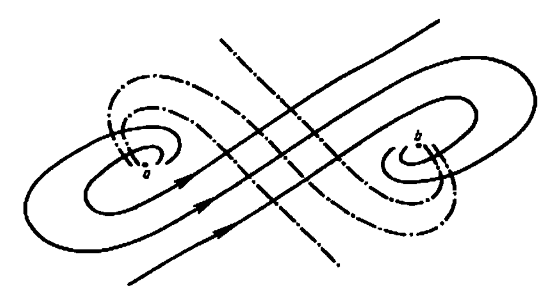


FIG. 109

Q, Γ), (b; $-Q$, Γ); las líneas del campo son espirales logarítmicas alrededor de los puntos a y b (fig. 109); $\ln\rho=-\frac{\Gamma}{Q}\theta+C$ son las líneas equipotenciales y $\ln\rho=\frac{Q}{\Gamma}\theta+C$, las líneas de corriente $\left(\frac{z-a}{z-b}=\rho e^{i\theta}\right)$. La velocidad es $V=$ $=\frac{\Gamma-i\theta}{-2\pi i}\frac{\bar{a}-\bar{b}}{(\bar{z}-\bar{a})(\bar{z}-\bar{b})}$. **1276.** En el punto $z=0$ se tiene un doblete de mo-

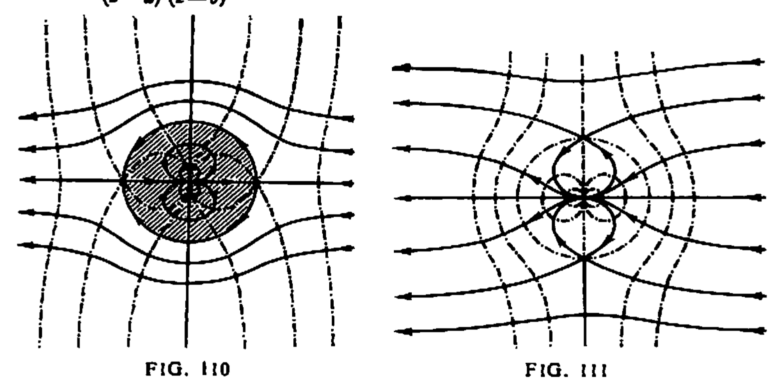


FIG. 110 FIG. 111

mento $p=2\pi$; $r=C\cos\varphi$ son las líneas equipotenciales y $r=C\operatorname{sen}\varphi$, las líneas de corriente. $V=-\frac{e^{2i\varphi}}{r^2}$, $V_\infty=0$. En los puntos $2\pm i$ la velocidad es igual a $-\frac{3\pm 4i}{25}$. **1277.** 1) y 2) En los puntos 0 e ∞ se tienen dobletes de momentos $\pm 2\pi R^2$ y 2π (el signo superior corresponde al punto 1) y el inferior, al punto 2)).

Las líneas del campo son curvas de tercer orden: $x \pm \frac{R^2 x}{x^2+y^2}=C$ son las líneas equipotenciales e $y \mp \frac{Ry}{x^2+y^2}=C$, las líneas de corriente. $V=1 \mp \frac{R^2}{r^2}e^{2i\varphi}$, $V_\infty=1$. Los puntos $z=\pm R$ para el punto 1) y los puntos $z=\pm Ri$ para el punto 2) son críticos (véanse las figuras 110 y 111). **1278.** En el punto $z=0$ se tiene un cuadriplete; $r^2=C\cos 2\varphi$ son las líneas equipotenciales y $r^2=C \operatorname{sen} 2\varphi$, las líneas de corriente. $V=-\frac{2}{r^3}e^{3i\varphi}$, $V_\infty=0$ (fig. 112)[1]. **1279.** En los puntos $\pm a$ se tienen manantiales de potencia 2π y en el ∞, un manantial de potencia -4π. Las líneas equipotenciales son las lemniscatas $|z^2-a^2|=C$ y las líneas de corriente son las hipérbolas $x^2-\frac{2}{C}xy-y^2=a^2$ que tienen su centro en el origen de coordenadas y que pasan por los puntos $\pm a$. $V=\frac{2\bar{z}}{\bar{z}^2-a^2}$, $V_{\pm ia}=\pm\frac{i}{a}$; el origen de coordenadas es un punto crítico (fig. 113). **1280.** En los puntos $\pm a$, $\pm ai$ se tienen manantiales: $(\pm a;\ 2\pi)$, $(\pm ai;\ -2\pi)$; $r^4+Ca^2r^2\cos 2\varphi+a^4=0$ $(|C|>2)$ son las líneas equipotenciales (entre ellas figuran también las rectas $y=\pm x$); $r^4+Ca^2r^2\times$ $\times \operatorname{sen} 2\varphi-a^4=0$ son las líneas de corriente (entre ellas figuran también los ejes de coordenadas). $V=\frac{4a\bar{z}^2}{\bar{z}^4-a^4}$, $V_\infty=0$, el punto $z=0$ es crítico (fig. 114). **1281.** En los puntos



FIG. 112

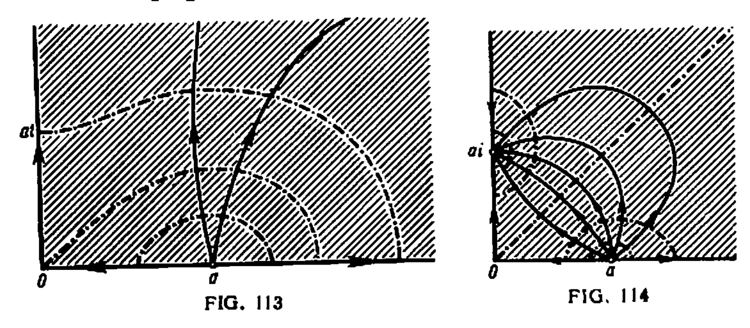


FIG. 113

FIG. 114

$\pm 1{,}0$ y en el ∞ se tienen manantiales: $(\pm 1;\ Q)$, $(0;\ -Q)$, $(\infty;\ -Q)$; las líneas equipotenciales son $r^2+\frac{1}{r^2}=C+2\cos 2\varphi$ $(C>0)$ (para grandes valores de C ellas se aproximan a las circunferencias $r=\sqrt{C}$ y $r=\frac{1}{\sqrt{C}}$); las líneas de co-

[1] Aquí y en lo sucesivo la corriente simétrica respecto a los ejes de coordenadas se indica sólo para el primer cuadrante.

rriente son $r=\sqrt{\dfrac{C+\operatorname{tg}\varphi}{C-\operatorname{tg}\varphi}}$ (a ellas pertenecen también los ejes de coordenadas y la circunferencia $r=1$). $V=\dfrac{Q}{2\pi}\overline{\left[\dfrac{z^2+1}{z(z^2-1)}\right]}$, $V_\infty=0$. Los puntos $\pm i$ son críticos (fig. 115). 1282. En los puntos $\pm i$, 0 se tienen manantiales: $(\pm i;\ 2\pi)$,

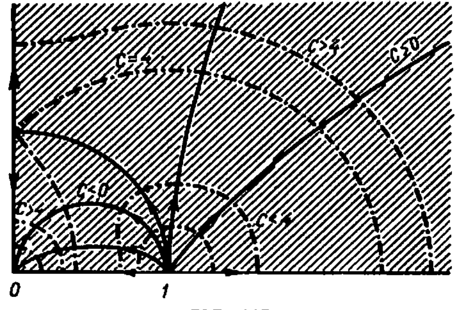


FIG. 115

$(0;\ -4\pi)$; las líneas equipotenciales son $Cr^4-2r^2\cos 2\varphi-1=0\ (C>-1)$ $\left(\text{para } C=0 \text{ se tiene la hipérbola } y^2-x^2=\dfrac{1}{2}\right)$; las líneas de corriente son $r=\sqrt{C\operatorname{sen} 2\varphi-\cos 2\varphi}$ (para $C=0$ se tiene la lemniscata de Bernoulli) y a ellas

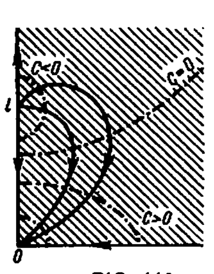


FIG. 116

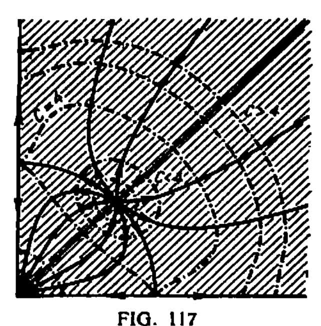


FIG. 117

pertenecen también los ejes de coordenadas. $V=-\dfrac{2}{z(z^2+1)}$, $V_\infty=0$ (fig. 116). 1283. En los puntos $\pm\dfrac{1\pm i}{\sqrt{2}}$ se tienen manantiales de potencia 2π, en el punto $z=0$, un manantial de potencia -4π y en el ∞, un manantial de potencia -4π; $r^4+\dfrac{1}{r^4}=C-2\cos 4\varphi$ $(C>0)$ son las líneas equipotenciales (que para $C<4$

constan de cuatro y para $C > 4$ de dos componentes; para grandes valores de C son "casi" las circunferencias $r=\sqrt[4]{C}$ y $r=\frac{1}{\sqrt[4]{C}}$); $\operatorname{tg} 2\varphi = C\frac{r^4-1}{r^4+1}$ son las líneas de corriente (a ellas pertenecen también los ejes de coordenadas, las bisectrices de los ángulos coordenados y la circunferencia $r=1$). $V=2\left[\frac{\overline{z^4-1}}{z(z^4+1)}\right]$, $V=0$. Los puntos ± 1, $\pm i$ son críticos (fig. 117). **1284.** En el punto $z=0$ se tiene un manantial $(0;\ Q)$ y en el punto $z=\infty$ un doblete y un manantial $(\infty;\ -Q)$; $y^2=e^{\frac{4\pi}{Q}(C-ax)}-x^2$ son las líneas equipotenciales $\left(\text{en coordenadas polares:}\right.$

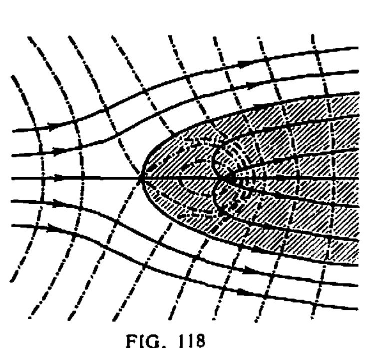


FIG. 118

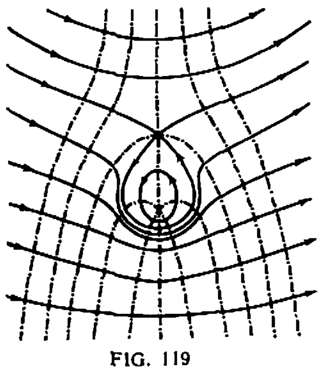


FIG. 119

$\left.ar\cos\varphi+\frac{Q}{2\pi}\ln r=C\right)$; $r=\frac{C-\frac{Q}{2\pi}\varphi}{a\operatorname{sen}\varphi}$ son las líneas de corriente; las líneas de corriente tienen asíntotas horizontales: $y_{x\to+\infty}\to\frac{C}{a}$, $y_{x\to\infty+}\to\frac{C-\frac{Q}{2}}{a}$; $V=$ $=a+\frac{Qe^{i\varphi}}{2\pi r}$, $V_\infty=a$; $z=-\frac{Q}{2\pi a}$ es un punto crítico (fig. 118). **1285.** En el punto $z=0$ se tiene un torbellino $(0;\ \Gamma)$ y en el ∞ un doblete y un torbellino $(\infty;\ -\Gamma)$: las líneas equipotenciales son $r=\frac{C-\frac{\Gamma\varphi}{2\pi}}{a\cos\varphi}$; las líneas de corriente son $x^2=e^{\frac{4\pi}{\Gamma}(ay-C)}-y^2$ $\left(ar\operatorname{sen}\varphi-\frac{\Gamma\ln r}{2\pi}=C\right)$; $V=a+\frac{\Gamma}{2\pi r}e^{i\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)}$, $V_\infty=a$; $z=\frac{\Gamma i}{2\pi a}$ es un punto crítico (fig. 119). **1286.** El fluido circunda una circunferencia de radio R; $V_\infty=a$, la circulación es Γ; los puntos críticos se determinan de la igualdad $z_{cr}=\frac{1}{4\pi a}(\Gamma i\pm\sqrt{16\pi^2a^2R^2-\Gamma^2})$. Si $\Gamma < 4\pi aR$, se tiene $|z_{cr}|=R$, es decir, ambos puntos críticos se encuentran sobre la circunferencia $|z|=R$; si $\Gamma=4\pi aR$, los puntos críticos se confunden; si $\Gamma > 4\pi aR$, se tiene $|z_{cr}| > R$ (el

segundo punto crítico se encuentra en este caso en el interior de la circunferencia $|z|=R$). Véase, por ejemplo, [2, cap. III, n°, 49]. **1287.** $w(z)=Ve^{-i\alpha}z+$ $+\sum_{k=1}^{n}\frac{\Gamma_k+iQ_k}{2\pi i}\ln(z-a_k)$. En el ∞ se tiene un doblete de momento $2\pi Ve^{-i\alpha}$ y un manantial-torbellino de potencia $Q_\infty=\sum_{k=1}^{n}Q_k$ y de intensidad $\Gamma_\infty=$ $=-\sum_{k=1}^{n}\Gamma_k$. **1288.** 1) No; 2) sí; 3) sí $\left(\text{por ejemplo, la corriente } w=\frac{1}{z}+\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln z\right.$ tiene líneas de corriente que salen del origen de coordenadas). **1289.** Una transformación conforme univalente transforma un manantial-torbellino en un manantial-torbellino de las mismas potencia e intensidad. Un multiplete se transforma en un conjunto de multipletes de hasta el mismo orden inclusive. Un doblete se transforma en un doblete con la siguiente ley de variación del momento: 1) $(a;$ $p)\to(\alpha;pc_1)$, 2) $(\infty;p)\to(\alpha;pc_{-1})$, 3) $(a;p)\to\left(\infty;\frac{p}{c_{-1}}\right)$, 4) $(\infty;p)\to\left(\infty;\frac{p}{c}\right)$.
1290. Una transformación conforme n-valente transforma un manantial-torbellino en un manantial-torbellino de potencia e intensidad n veces menores. **1291.** La ley de variación de un manantial-torbellino (a^* es el punto simétrico de a) es: $(a;Q;\Gamma)\longrightarrow(a^*;Q,-\Gamma)$ para el caso de una línea de corriente y $(a;Q,\Gamma)\longrightarrow$ $\longrightarrow(a^*;-Q,\Gamma)$ para el caso de una línea equipotencial. La ley de variación de un doblete es más compleja. En el caso de una línea de corriente recta se tiene: $(a;p)\longrightarrow(a^*;p')$, donde los vectores p, p', trazados por a y a^* respectivamente, son simétricos respecto a la línea de corriente. En el caso de una línea de corriente circular $|z|=R$, se tiene $(a;p)\longrightarrow\left(a^*;-\frac{R^2}{\bar{a}^2}\bar{p}\right)$, si $a\neq0$ y $(a;p)\longrightarrow\left(\infty;\frac{\bar{P}}{R^2}\right)$, si $a=0$. En el caso de una línea equipotencial recta o circular se tiene: $(a;p)\longrightarrow(a^*;-p')$; $(a;p)\longrightarrow\left(a^*;\frac{R^2}{\bar{a}^2}\bar{p}\right)$, $(0;p)\longrightarrow\left(\infty;\frac{\bar{p}}{R^2}\right)$ respectivamente y con la misma denotación. **1292.** 1) En todos los casos las singularidades de la corriente deben ser simétricas respecto a la circunferencia $|z|=R$ (véase el problema 1291). En particular, los ejes de los dobletes, pertenecientes a esta circunferencia, deben ser tangentes a la misma. La suma de las potencias debe ser igual a cero, para lo cual debe ser $\sum Q_k+\frac{1}{2}\sum Q_l'=0$, donde Q_k es la potencia de los manantiales del interior de $|z|=R$ y Q_l' es la potencia de los manantiales pertenecientes a $|z|=R$. Sobre $|z|=R$ no debe haber torbellinos; 2) Las singularidades de la corriente deben ser simétricas respecto a la circunferencia $|z|=R$. En particular, los ejes de los dobletes, pertenecientes a $|z|=R$, deben ser ortogonales a esta circunferencia. La suma de intensidades debe ser igual a cero, para lo cual tiene que ser $\sum\Gamma_k+\frac{1}{2}\sum\Gamma_l'=0$, donde Γ_k son las intensidades de los torbellinos del interior de $|z|=R$ y Γ_l' son las intensidades de los torbellinos sobre $|z|=R$; no debe haber manantiales sobre $|z|=R$.
1293. 1) $w=Vz+c$ (c es una constante); 2) $w=\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\frac{z-a}{z-\bar{a}}+c$; 3) $w=\frac{Q}{2\pi}\ln\times$ $\times[(z-a)(z-\bar{a})]+c$ (en el ∞ hay un manantial de potencia $-2Q$); 4) $w=$ $=\frac{p}{2\pi}\frac{1}{z-a}+\frac{\bar{p}}{2\pi}\frac{1}{z-\bar{a}}+c$; 5) $w=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\Gamma_k+iQ_k}{2\pi i}\ln(z-a_k)+\frac{-\Gamma_k+iQ_k}{2\pi i}\times\right.$

$\times \ln(z-\overline{a}_k)\Big]+\frac{p}{2\pi}\frac{1}{z-a}+\frac{\overline{p}}{2\pi}\frac{1}{z-\overline{a}}+Vz+c$ (en el ∞ hay un manantial de potencia $-\sum_{k=1}^{n} Q_k$); 6) la corriente es posible solamente para $\Gamma=0$, $\operatorname{Im} p=0$; en este caso $w=\frac{p}{2\pi z}+\frac{Q}{2\pi}\ln z+c$. **1294.** 1) $w=\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\frac{z-a}{R^2-\overline{a}z}+c$; 2) $w=\frac{p}{2\pi}\frac{1}{z-a}+\frac{p^*}{2\pi}\frac{1}{z-a^*}+c$, si $a\neq 0$ $\left(a^*=\frac{R^2}{\overline{a}},\ p^*=-\frac{R^2}{\overline{a}^2}\overline{p}\right)$, y $w=\frac{p}{2\pi z}+\frac{p^*}{2\pi}z+c$, $a=0$ $\left(p^*=\frac{\overline{p}}{R^2}\right)$. **1295.** 1) $w=\sum_{k=1}^{n}\frac{Q_k}{2\pi}\ln[(z-a_k)\times(R^2-\overline{a}_k z)]+c$, si $\sum_{k=1}^{n} Q_k=0$; 2) $w=\sum_{k=1}^{n}\frac{Q_k}{2\pi}\ln[(z-a_k)(R^2-\overline{a}_k z)]+\sum_{l=1}^{m}\frac{Q_l'}{2\pi}\ln(z-a_l')+c$, si $\sum_{k=1}^{n} Q_k+\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{m} Q_l'=0$. **1296.** 1) $w=\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\frac{z-a}{R^2-\overline{a}z}+c$; 2) $w=\frac{p}{2\pi}\frac{1}{z-a}+\frac{p^*}{2\pi}\frac{1}{z-a^*}+c\left(a^*=\frac{R^2}{\overline{a}},\ p^*=-\frac{R^2}{\overline{a}^2}p\right)$; 3) $w=Ve^{-i\alpha}z+\frac{R^2Ve^{i\alpha}}{z}+c$; 4) $w=Ve^{-i\alpha}z+\frac{R^2Ve^{i\alpha}}{z}+\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln z+c$. **1297.** $w=\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\frac{(z-ia)(az+i)}{(z+ia)(az-i)}+c$. **1298.** $w=\frac{Q}{2\pi}\ln(z^4+a^6)+c$. **1299.** $w=\frac{Q}{2\pi}\ln(z^2-1)+c$. **1300.** 1) $w=\frac{Q}{2\pi}\ln\frac{z^2-1}{z^2+1}+c$; 2) $w=\frac{Q}{2\pi}\ln\left(1+\frac{4}{z^4}\right)+c$.

1301. $w=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\Gamma_k+iQ_k}{2\pi i}\ln(z-a_k)+\frac{\Gamma_k-iQ_k}{2\pi i}\ln(z-\overline{a}_k)\right]+\frac{p}{2\pi}\frac{1}{z-a}-\frac{\overline{p}}{2\pi}\times\frac{1}{z-\overline{a}}+Ve^{-i\alpha}z+c$. La corriente es posible, si $\alpha=\pm\frac{\pi}{2}$ (si $\sum_{k=1}^{n}\Gamma_k\neq 0$, en el ∞ se tiene un torbellino de intensidad $-2\sum_{k=1}^{n}\Gamma_k$). **1302.** $w=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\Gamma_k+iQ_k}{2\pi i}\ln(z-a_k)+\frac{\Gamma_k-iQ_k}{2\pi i}\ln(R^2-\overline{a}_k z)\right]+Ve^{-i\alpha}z-\frac{R^2Ve^{i\alpha}}{z}+c$. La corriente es posible, si $\sum_{k=1}^{n}\Gamma_k=0$, $a=0$ y $p=-2\pi R^2Ve^{i\alpha}$. **1303.** Supongamos que $t=f(z)$ transforma conformemente D en el círculo $|t|<1$. En este caso, $w=\Phi[f(z)]$, donde

$$\Phi(t)=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\Gamma_k+iQ_k}{2\pi i}\ln(t-t_k)+\frac{-\Gamma_k+iQ_k}{2\pi i}\ln(1-\overline{t}_k t)\right]+c,$$

$t_k=f(a_k)$, con la condición indispensable de que $\sum_{k=1}^{n} Q_k=0$. **1304.** Supon-

gamos que $t=f(z)$ transforma conformemente D en el recinto $|t|>1$ con la normalización $f(\infty)=\infty$, $f'(\infty)>0$. En este caso y bajo la condición de que $\sum_{k=1}^{n} Q_k=0$, se tiene $w=\Phi[f(z)]$, donde $\Phi(t)=\frac{Ve^{-i\alpha}}{f'(\infty)}t+\frac{Ve^{i\alpha}}{f'(\infty)\cdot t}+$ $+\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\Gamma_k+iQ_k}{2\pi i}\ln(t-t_k)+\frac{-\Gamma_k+iQ_k}{2\pi i}\ln(1-\bar{t}_k t)\right]+c$, $t_k=f(a_k)$.

1305. Conservando las denotaciones del problema **1304**, se tiene $w=\Phi[f(z)]$, donde

$$\Phi(t)=\frac{Ve^{-i\alpha}}{f'(\infty)}t+\frac{Ve^{i\alpha}}{f'(\infty)\cdot t}+\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln t+c.$$

Si $\Gamma=0$, $w(z)$ transforma el exterior de C en el exterior del segmento $\left[-\frac{2V}{f'(\infty)}, \frac{2V}{f'(\infty)}\right]$ del eje real del w-plano con la normalización $w(\infty)=\infty$, $w'(\infty)=Ve^{-i\alpha}$. **1306.** 1) $w(z)=\frac{V}{a-b}[(az-b\sqrt{z^2-c^2})\cos\alpha+i(bz-a\times$ $\times\sqrt{z^2-c^2})\operatorname{sen}\alpha]+\text{const}$ $(V_\infty=Ve^{i\alpha}$, $c=\sqrt{a^2-b^2})$; 2) $w(z)=\frac{V}{a-b}\times$ $\times[(az-b\sqrt{z^2-c^2})\cos\alpha+i(bz-a\sqrt{z^2-c^2})\operatorname{sen}\alpha]+\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln(z+\sqrt{z^2-c^2})+\text{const}$. **1307.** 1) $w(z)=V(z\cos\alpha-i\sqrt{z^2-c^2}\operatorname{sen}\alpha)+\text{const}$ $(V_\infty=Ve^{i\alpha})$; 2) $w(z)=$ $=V(z\cos\alpha-i\sqrt{z^2-c^2}\operatorname{sen}\alpha)+\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln(z+\sqrt{z^2-c^2})\,\text{const}$, donde $\Gamma=$ $=-2\pi cV\operatorname{sen}\alpha$ (c es el punto de partida). **1308.** Supongamos que el perfil de Zhukovski se obtiene mediante la transformación $z=\frac{1}{2}\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right)$ de la circunferencia $|\zeta-\zeta_0|=|1-\zeta_0|=R>1$, $\zeta_0=1-ke^{-i\beta}\left(0\leqslant\beta<\frac{\pi}{2}\right)$. En este caso, para la circulación Γ y $V_\infty=Ve^{i\alpha}$ se tiene $w(z)=\frac{VR}{2}\left(\frac{z-\zeta_0+\sqrt{z^2-1}}{R}e^{-i\alpha}+\right.$ $\left.+\frac{Re^{i\alpha}}{z-\zeta_0+\sqrt{z^2-1}}\right)+\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln(z-\zeta_0+\sqrt{z^2-1})+c$, siendo $\Gamma=-2\pi RV\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$ (Γ se determina de la condición $w'(1)=0$ de acuerdo con el postulado de Zhukovski—Chaplyguin). **1309.** $w(z)=\sqrt{z-\frac{p}{2}}+c$, si la parábola es circundada por el exterior, y $w(z)i\operatorname{ch}\frac{\sqrt{2z-p}}{2\sqrt{p}}$, si la parábola es circundada por el interior. **1310.** $w(z)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[(z+\sqrt{z^2-c^2})^{\frac{\pi}{2\beta}}e^{-\frac{i\pi\alpha}{2\beta}}-(z-\sqrt{z^2-c^2})^{\frac{\pi}{2\beta}}\times\right.$ $\left.\times e^{\frac{i\pi\alpha}{2\beta}}\right]+\text{const}$, si la rama de la derecha de la hipérbola es circundada por el exterior $\left(\operatorname{tg}\alpha=\frac{b}{a}, \beta=\pi-\alpha, c=\sqrt{a^2+b^2}\right.$, y $w(z)=\frac{i}{\sqrt{2}}\left[(z+\sqrt{z^2-c^2})^{\frac{\pi}{2\alpha}}+\right.$ $\left.+(z-\sqrt{z^2-c^2})^{\frac{\pi}{2\alpha}}\right]+\text{const}$, si la rama de la derecha de la hipérbola es circundada por el interior. **1311.** $w(z)$ se determina de la ecuación $z=e^{\frac{\pi w}{v}}+\frac{\pi w}{v}$

(los valores de la función de corriente sobre las semirectas circundadas se toman iguales a $\pm v$). **1812.** $w = \text{Arch}\, z = \text{Ln}\,(z + \sqrt{z^2 - 1})$ (los valores de la función de corriente sobre las semirrectas circundadas se toman iguales a 0 y a π).

1313. *1) Una corriente de período π; en los puntos* $k\pi$ (k es un número entero) se tienen manantiales de potencia Q; los puntos $\frac{\pi}{2} + k\pi$ son críticos. La velocidad en el ∞ en la franja de períodos es $V_\infty = V(x \mp i\infty) = \pm \frac{Q}{2\pi} i$. Las líneas de corriente y las líneas equipotenciales véanse en la fig. 120. 2) Lo mismo, sólo en los puntos $k\pi$ en lugar de manantiales se tienen torbellinos de intensidad Γ y además $V(x \pm i\infty) = \mp \frac{\Gamma}{2\pi}$. Para construir el campo hay que intercambiar las líneas de corriente y las líneas equipotenciales de la fig. 120.

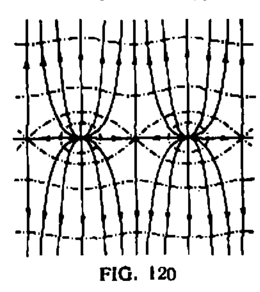


FIG. 120

1314. Una corriente de período π; en los puntos $k\pi$ se tienen dobletes de momento p; la velocidad $V(x \pm i\infty) = 0$. Las líneas de corriente véanse en la fig. 121. **1315.** La solución es posible para $V_1 = V - \frac{Q}{\omega}$;

$$w = \frac{\Gamma + iQ}{2\pi i} \ln \operatorname{sen} \frac{\pi(z-a)}{2\omega} + \frac{-\Gamma + iQ}{2\pi i} \ln \operatorname{sen} \frac{\pi(z+\bar{a})}{2\omega} + i\left(V - \frac{Q}{2\omega}\right) z + c.$$

FIG. 121

1316. $w = \frac{p}{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\pi(z-a)}{2\omega} - \frac{\bar{p}}{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\pi(z+\bar{a})}{2\omega} + iVz + c.$ **1317.** Supongamos que $t = f(z)$ transforma conformemente S en una franja rectilínea S_t y que Ω_1, Ω_2 se transforman en los puntos infinitos de S_t. Para S_t el problema se reduce a los problemas **1315** y **1316**, siempre que existan y sean diferentes de cero las

derivadas $f'(\Omega_1)$, $f'(\Omega_2)$, las velocidades V_1, V_2 sean tangentes a la frontera de S en el ∞ y una de ellas sea arbitraria; la solución existe y es única. **1318.** 1) Es necesario y suficiente que los números M y C sean reales. En este caso, las curvas $\operatorname{Re} u = \pm\omega$ son las líneas equipotenciales. En la fig. 122 se da la transformación $t = f(u) = \zeta(u) + Cu$ para diferentes valores reales de C. La

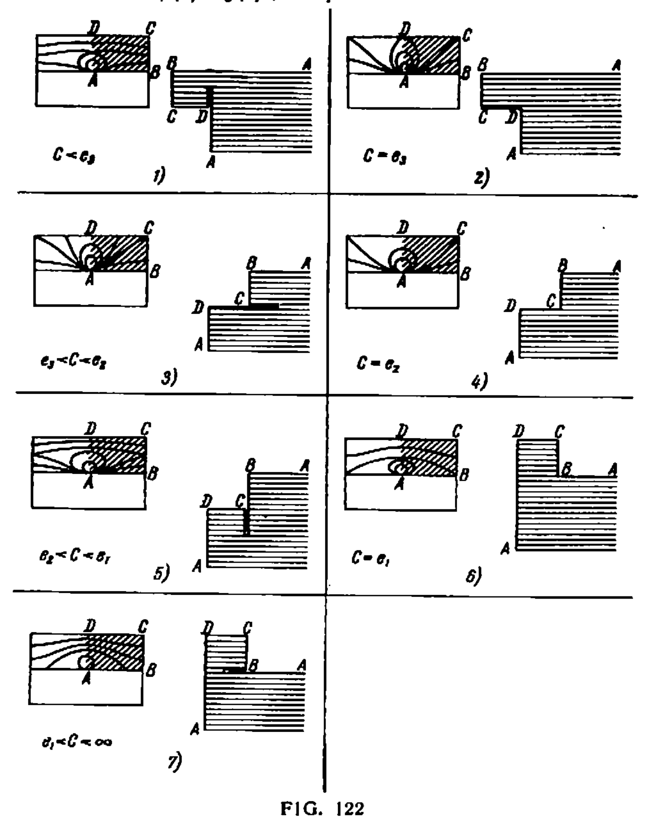


FIG. 122

fig. 122 corresponde al caso en que $\omega > |\omega'|$. De acuerdo con la solución del problema **1264**, en este caso se tiene $e_3 < 0 < e_2 < e_1$ y $k^2 > \frac{1}{2}$. 2) $f(u) =$

$$= \frac{M}{4\pi\omega} \frac{\vartheta_1'\left(\frac{u-\alpha}{2\omega}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{u-\alpha}{2\omega}\right)} + c.$$ Para $\alpha = 0$ y $M = 2\pi$ la transformación $t = f(u) =$

$= \zeta(u) - \frac{\eta}{\omega} u = \frac{1}{2\omega} \frac{\vartheta_1'\left(\frac{u}{2\omega}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{u}{2\omega}\right)}$ está representada en la fig. 123 $\left(\text{notemos que } e_3 < -\frac{\eta}{\omega} < e_2\right)$. **1322.** $f(u) = \frac{M}{2\pi} \zeta(u-\alpha) + \frac{N}{2\pi} \zeta(u-\beta) + Cu + c$. Para que la función $f(u)$ sea elíptica, debe tener la forma $f(u) = \frac{M}{2\pi} [\zeta(u-\alpha) - \zeta(u-\beta)] + c$. *Si* $\operatorname{Im} u = \pm \operatorname{Im} \omega'$ *son las líneas de corriente,* M *debe ser real y, si son las* líneas equipotenciales, debe ser puramente imaginario. α y β pueden tomar sólo los valores 0, ω_k $(k = 1, 2, 3)$. Para $\alpha = 0$, $\beta = \omega_k$, $M = 2\pi$ se tiene

$$f(u) = \zeta(u) - \zeta(u - \omega_k) = \eta_k - \frac{1}{2} \frac{\wp'(u)}{\wp(u) - e_k} = \eta_k + \frac{\sigma_i(u)\,\sigma_j(u)}{\sigma(u)\,\sigma_k(u)}$$

(i, j, k es una permutación de 1, 2, 3). Los puntos $u = \frac{\omega_k}{2}$ $(\operatorname{mod} \omega, \omega')$ son críticos, es decir, en ellos $f'(u) = 0$. Las transformaciones principales se dan en la

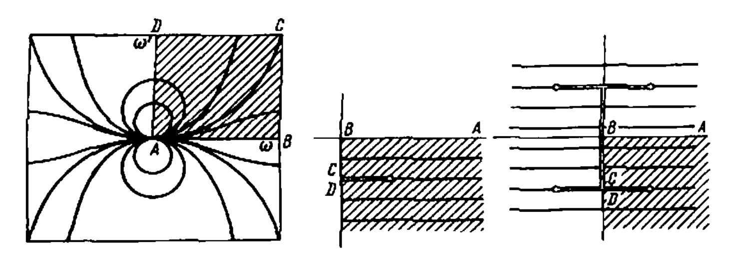


FIG. 123

fig. 124. Los rectángulos indicados en esta figura se transforman en el semiplano limitado por una recta horizontal $(k = 1)$, en el semiplano limitado por una recta vertical $(k = 2)$ y en un cuadrante de dos hojas pegado a lo largo de la semirecta horizontal correspondiente a la línea punteada del rectángulo $(k = 3)$. Estas transformaciones se prolongan según el principio de simetría. **1323.** Los períodos de la corriente son 4K y $2i$K′, hay dobletes $2m\text{K} + (2n+1)i\text{K}'$ de momentos $2\pi\left(-\frac{1}{k}\right)^m$ *y los puntos críticos son* $(2m+1)\,\text{K} + ni\text{K}'$ (m *y* n son números enteros). La transformación puede verse en la fig. 125. **1324.** Los períodos de la corriente son 4K y $2\text{K} + 2i\text{K}'$, los dobletes son los mismos que en el problema 1323, pero de momentos $2\pi \frac{(-1)^{n+m}}{ik}$, los puntos críticos son $2m\text{K} + 2ni\text{K}'$ y $(2m+1)\,\text{K} + (2n+1)\,i\text{K}'$ (fig. 126). **1325.** Los períodos de la corriente son 2K y $4i$K′, los dobletes son los mismos que en el problema 1323, pero de momentos $2\pi(-1)^{n+m} i$, los puntos críticos son $m\text{K} + 2ni\text{K}'$. Las transformaciones principales se dan en la fig. 127. **1326.** $f(u) = \frac{\Gamma + iQ}{2\pi i} \times$ $\times \ln \frac{\sigma(u-\alpha)}{\sigma(u-\beta)} + Cu + c$. En particular, para $\alpha = 0$, ω, $\omega + \omega'$ y $\beta = \omega'$, omitiendo

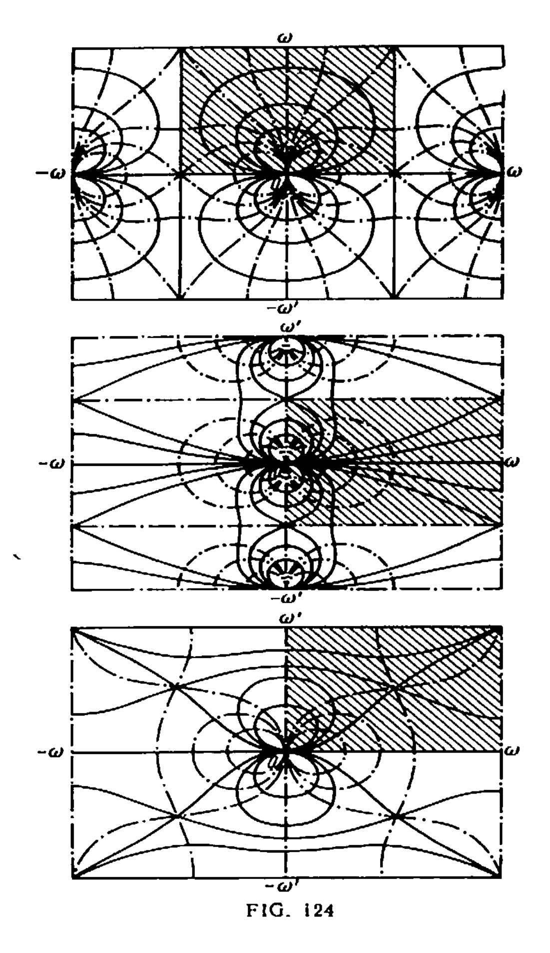


FIG. 124

la constante aditiva y el factor $\frac{\Gamma+iQ}{2\pi i}$, cambiando C y transformando la σ— función, se obtiene respectivamente $\ln\frac{\sigma(u)}{\sigma_3(u)}+Cu$, $\ln\frac{\sigma_1(u)}{\sigma_3(u)}+Cu$, $\ln\frac{\sigma_2(u)}{\sigma(u)}+Cu$. Si $f(u+2\omega)=f(u)$, se tiene $f(u)=\frac{\Gamma+iQ}{2\pi i}\ln\frac{\vartheta_1\left(\frac{u-\alpha}{2\omega}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{u-\beta}{2\omega}\right)}+c$. **1327.** 1), 2) y

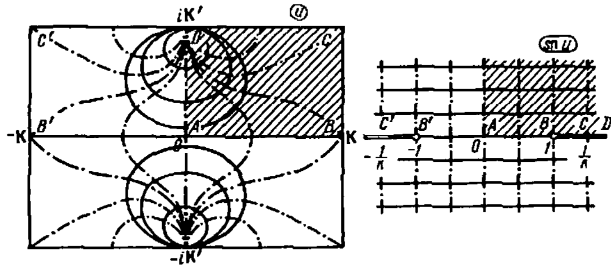


FIG. 125

3) Corrientes doblemente periódicas con manantiales de potencia 2π y -2π en los ceros y en los polos de las funciones sn u, cn u, dn u (fig. 128). **1328.** Una corriente doblemente periódica con cuadripletes en los ceros de $\wp(u)$ (fig. 129). **1329.** Corrientes periódicas de período 2ω (¡el período de la velocidad!) con manantiales de potencia 2π en los ceros de $\vartheta_k(v)$ (fig. 130, 1 para ϑ_4 y ϑ_3 desplazados en 1/2 hacia la derecha; fig. 130, 2 para ϑ_1 y ϑ desplazados hacia

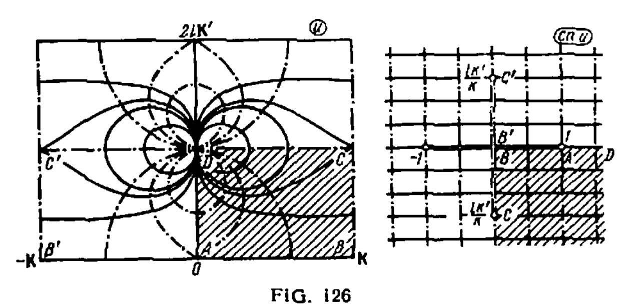


FIG. 126

la derecha en 1/2). **1330.** 1) $f(z)=\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln z+c$; 2) $f(z)=\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln t(z)+c$, donde $t(z)$ transforma el recinto D en un anillo circular de manera que se conservan las direcciones de los recorridos de los contornos frontera; 3) $f(z)=\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\frac{z-z_1}{z-z_2}+c$, donde z_1, z_2 son recíprocamente simétricos respecto a cada una de las circunferencias (es decir, son los puntos de intersección de la circunferencia ortogonal

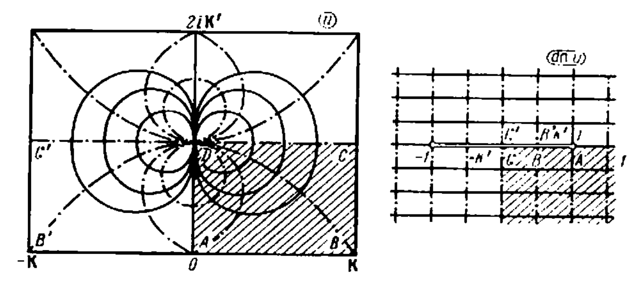


FIG. 127

FIG. 128

21 3.16 1032

a las dos dadas y de la recta que une los centros de las mismas) y el punto z_1 se encuentra en el interior de la circunferencia con la circulación Γ; 4) $f(z)=$ $=\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln t(z)+c$, donde la función $t(z)$ transforma el recinto D en un anillo con-

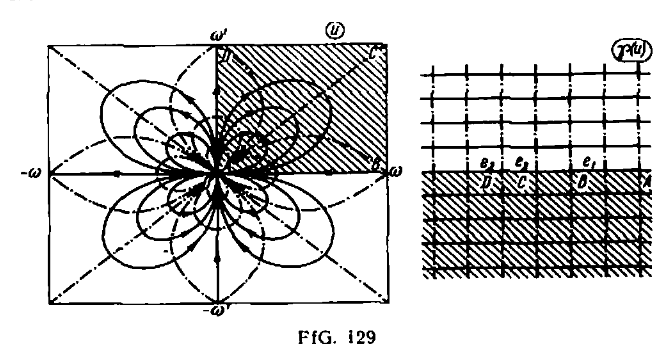


FIG. 129

servando la dirección del recorrido del contorno con la circulación Γ.
1331. $f(z)=\Phi\left(\frac{\omega}{\pi i}\ln z\right)$, donde

$$\Phi(u)=-\frac{i}{4\pi^2 a}\left[p\,\frac{\vartheta_1'\left(\frac{u-\alpha}{2\omega}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{u-\alpha}{2\omega}\right)}-\bar{p}\,\frac{\vartheta_1'\left(\frac{u+\alpha}{2\omega}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{u+\alpha}{2\omega}\right)}\right]+c,\quad \alpha=\frac{\omega}{\pi i}\ln a$$

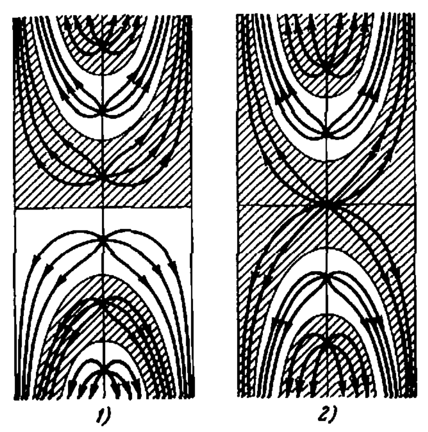


FIG. 130

La función $f(z)$ transforma R en el exterior de dos segmentos paralelos situados a la distancia $\frac{|\operatorname{Re} ip|}{2\pi a}$ uno del otro (fig. 131). Los extremos de los segmentos se determinan de la condición $\Phi'(u)=0$. **1332.** $f(z)=\Phi[u(z)]$, donde

$$\Phi(u)=\frac{V}{2\omega}\left[ke^{i\alpha}\frac{\vartheta_1'\left(\frac{u-a}{2\omega}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{u-a}{2\omega}\right)}+\bar{k}e^{-i\alpha}\frac{\vartheta_1'\left(\frac{u-\bar{a}}{2\omega}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{u-\bar{a}}{2\omega}\right)}\right]+c$$

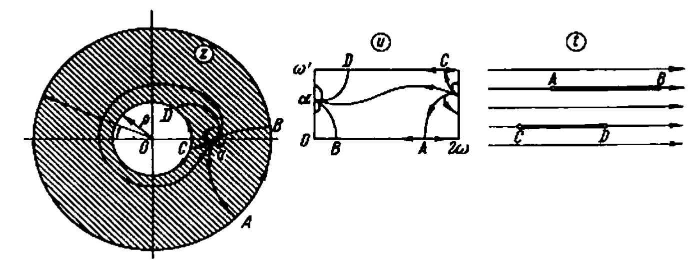


FIG. 131

y $u(z)=a+\frac{k}{z}+\ldots$ es la función que transforma el recinto D en un rectángulo. **1333.** $f(z)=\Phi\left(\frac{\omega}{\pi i}\ln z\right)$, donde

$$\Phi(u)=A\wp(u)+\frac{B}{2\omega}\frac{\vartheta_1'\left(\frac{u}{2\omega}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{u}{2\omega}\right)}+c,$$

$$A=-\frac{c_{-2}\omega^2}{\pi^2},\qquad B=\frac{i\omega}{\pi}(c_{-2}-c_{-1}).$$

El problema es posible, si c_{-2} es un número real y la diferencia $c_{-2}-c_{-1}$ es un número imaginario puro. Si $A\neq 0$, la función $f(z)$ transforma R en el exterior del rayo horizontal y del segmento que es paralelo a este rayo y se encuentra a una distancia de $\frac{|c_{-2}-c_{-1}|}{2}$ de él. Los externos del segmento y el punto inicial del rayo se determinan de la condición $\Phi'(u)=0$ (fig. 132, *1*) (en la fig. 132, *2* se representa el caso en que $B=0$). En cambio, si $A=0$, es decir, si se tiene solamente un doblete, R se transforma en un semiplano, limitado por una recta horizontal, que tiene un corte a lo largo del segmento horizontal que se encuentra a una distancia de $\frac{|c_{-1}|}{2}$ de la recta (fig. 132, *3*). **1334.** 1) La solución es posible, si $\Gamma_1-\Gamma_2=\Gamma$ en este caso, se tiene $f(z)=\Phi\left(\frac{\omega}{\pi i}\ln z\right)$, donde

$$\Phi(u)=\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\frac{\vartheta_1\left(\frac{u-\alpha}{2\omega}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{u+\alpha}{2\omega}\right)}+\frac{\Gamma_2}{2\omega}u+c,\qquad \alpha=\frac{\omega}{\pi i}\ln a$$

$\left(\text{es preciso tener en cuenta que el incremento de } \ln \frac{\vartheta_1\left(\frac{u-\alpha}{2\omega}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{u+\alpha}{2\omega}\right)} \text{ es igual a } 2\pi i,\right.$ cuando u varía entre 0 y 2ω, y es igual a 0, cuando u varía entre $2\omega+i\omega'$ y

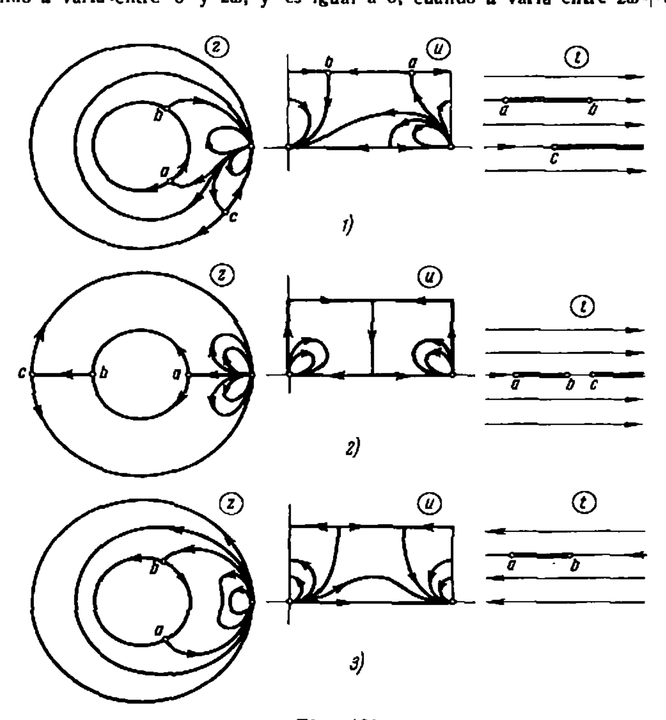


FIG. 132

$\left.i\omega'\right)$. Los puntos críticos de la corriente se determinan de la ecuación

$$\wp(u)=\wp(\alpha)+\frac{1}{2}\,\frac{\wp'(\alpha)}{\left[\zeta(\alpha)-\frac{\eta}{\omega}\,\alpha\right]+\lambda\left[\zeta(\omega')-\frac{\eta}{\omega}\,\omega'\right]},$$

donde $\lambda=\frac{\Gamma_2}{\Gamma}$, y se encuentran en los lados del rectángulo de vértices $(0,\ \omega,\ \omega+\omega',\ \omega')$ y de los rectángulos simétricos a éste. En el caso en que $\Gamma_2=0$, la función $\mathfrak{Z}(z)$ transforma R en un círculo con un corte a lo largo de un arco de la

circunferencia (fig. 133; $\Gamma > 0$). En el caso en que $\Gamma_2 = -\Gamma_1 = -\frac{\Gamma}{2}$ la función $\mathfrak{Z}(z)$ transforma R en un recinto de dos hojas que se obtiene al pegar las partes exteriores de los círculos $|\mathfrak{Z}| > 1$ y $|\mathfrak{Z}| > \frac{\rho}{a^2}$ a lo largo de los cortes que van desde $-\infty$ hasta $\mathfrak{Z}_0 = -e^{\frac{4\pi\psi_0}{\Gamma}}$, donde ψ_0 es el valor de ψ en el punto crítico. La función $s(\mathfrak{Z})$ transforma este recinto de dos hojas en el exterior de dos lemniscatas y $f(z) = -\frac{\Gamma}{4\pi i} \ln [(s(z) - s_0)(s(z) + s_0)]$ (fig. 134; $\Gamma > 0$, $a^2 < \rho$; las semifranjas del t-plano deben ser pegadas a lo largo del corte común). En el caso general, $\psi = 0$ en la base inferior del rectángulo del u-plano y φ varía

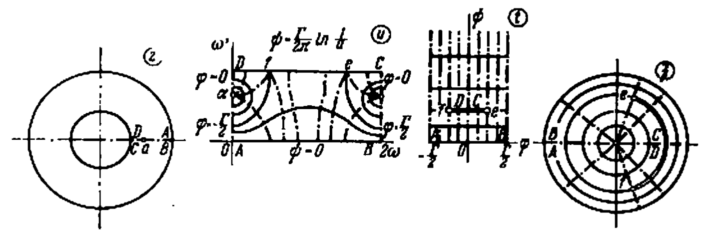


FIG. 133

entre $-\frac{\Gamma}{2}$ y $\frac{\Gamma}{2} + \Gamma_2$ y en la base superior $\psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{1}{a} + \frac{\Gamma_2}{2\pi} \ln \frac{1}{\rho}$ y φ varía entre 0 y Γ_2 ($\Gamma > 0$). 2) $f(z) = \Phi[u(z)]$, donde

$$\Phi(u) = \frac{V}{2\omega} \left[ke^{i\alpha} \frac{\vartheta_1'\left(\frac{u-a}{2\omega}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{u-a}{2\omega}\right)} + ke^{-i\alpha} \frac{\vartheta_1'\left(\frac{u-\bar{a}}{2\omega}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{u-\bar{a}}{2\omega}\right)} \right] +$$

$$+ \frac{\Gamma_1 - \Gamma_2}{2\pi i} \ln \frac{\vartheta_1\left(\frac{u-a}{2\omega}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{u-\bar{a}}{2\omega}\right)} + \frac{\Gamma_2}{2\omega} u + C \quad \text{y} \quad u(z) = a + \frac{k}{z} + \ldots$$

transforma el recinto D en un anillo circular. **1335.** $u = \alpha x - \beta y$, $v = \beta x + \alpha y$, $E = -i\bar{c}$ un doblete $(\infty; -i\bar{c}$. **1336.** $u = 2q\varphi$, $v = 2q \ln \frac{1}{r}$; $E = \frac{2q}{r} e^{i\varphi}$; cargas puntuales $(a; 2q)$ y $(\infty; -2q)$. **1337.** $u = 2q \arg \frac{z-b}{z-a}$, $v = 2q \ln \left| \frac{z-a}{z-b} \right|$; $E = \frac{2q(\bar{b} - \bar{a})}{(\bar{z} - \bar{a})(\bar{z} - \bar{b})}$; cargas puntuales $(b; 2q)$ y $(a; -2q)$. **1338.** $u = -2q \arg \times$ $\times (z^2 - a^2)$, $v = 2q \ln |z^2 - a^2|$; $E = -\frac{4q\bar{z}}{\bar{z}^2 - \bar{a}^2}$; cargas puntuales $(a; -2q)$, $(-a;$ $-2q)$ y $(\infty; 4q)$ (véase la figura 113). **1339.** $u = \frac{|p|}{r} \operatorname{sen}(\varphi - \alpha)$, $v = \frac{|p|}{r} \cos(\varphi - \alpha)$; $E = \frac{|p|}{r^2} e^{i(2\varphi - \alpha)}$; un doblete $(0; p)$ (fig. 135). **1340.** $u = \left(r \pm \frac{R^2}{r}\right) \cos \varphi$,

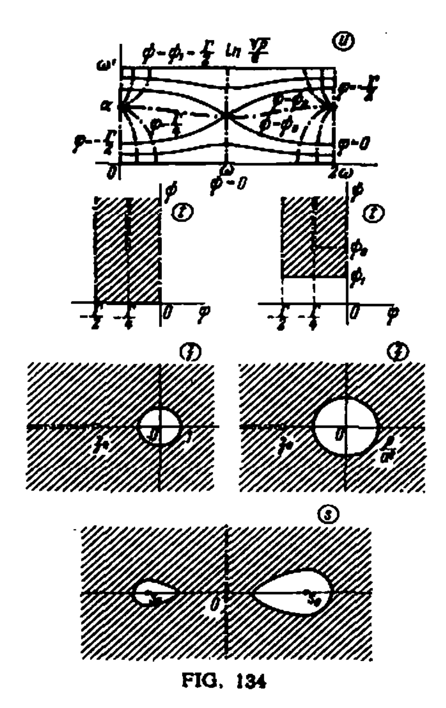


FIG. 134

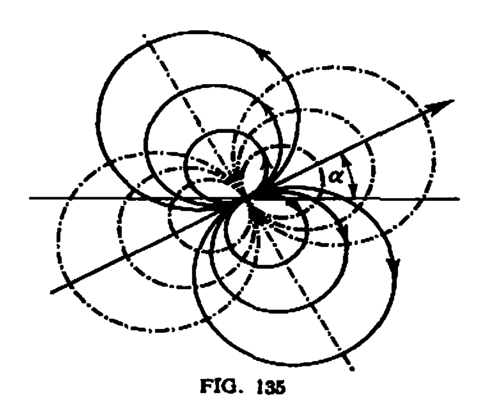


FIG. 135

$v=\left(r\pm\frac{R^2}{r}\right)\operatorname{sen}\varphi$; $E=-i\left(1\mp\frac{R^2}{r^2}e^{2i\varphi}\right)$; dobletes (0; $\mp iR^2$) y (∞; $-i$) (véanse las figuras 110 y 111). **1341.** $u=-py+2q\varphi$, $v=px+2q\ln\frac{1}{r}$: $E=-p+\frac{2q}{r}e^{i\varphi}$; cargas puntuales (0; $2q$) y (∞; $-2q$); doblete (∞; p) (compárese con la fig. 118). **1342.** $u=-py+\sum_{k=1}^{n}2q_k\varphi_k$, $v=px+\sum_{k=1}^{n}2q_k\ln\frac{1}{r_k}$, $E=-p+\sum_{k=1}^{n}\frac{2q_k}{r_k}e^{i\varphi_k}$, donde $z-a_k=r_ke^{i\varphi_k}$; cargas puntuales (a_k; $2q_k$); doblete (∞; p) (fig. 136). **1343.** 1) La magnitud de la carga puntual se conserva;

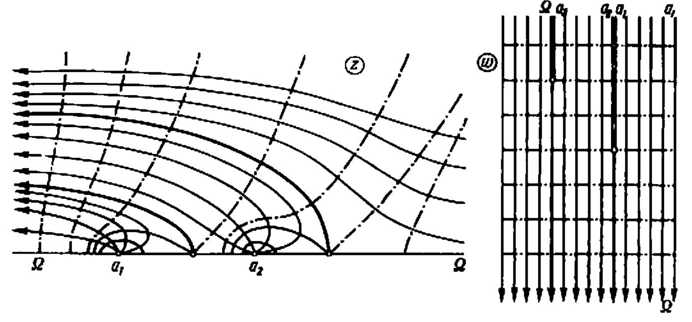


FIG. 136

la ley de variación del momento de un doblete es la misma que en el problema 1289; 2) el signo de la carga se altera; la ley de variación del momento de un doblete es la misma que en el problema 1291 para la prolongación a través de la línea de corriente. **1344.** $v=2qg(z, a)$. **1345.** $w=2qi\ln\frac{z-\bar{z}_0}{z-z_0}+c$. **1346.** 1) y 2) $w=2qi\ln\frac{R^2-\bar{z}_0z}{R(z-z_0)}+c$. **1347.** $w=2qi\ln\frac{1}{f(z)}+\text{const}$, donde $f(z)=\frac{z-\sqrt{z^2-c^2}}{a-b}$, $c^2=a^2-b^2$. **1348.** $w=2qi\ln\frac{1}{f(z)}+c$, donde $f(z)=\frac{z-\sqrt{z^2-R^2}}{R}$. **1349.** $w=2qi\ln\frac{1}{f(z)}$, donde $t=f(z)$ se determina de la ecuación $z=\frac{2d}{B\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)}\int_t^1\frac{\sqrt{1-t^4}}{t^2}dt+\frac{d}{2}$ (véanse el problema 1236 para $n=4$ y 1271). **1350.** $w=2qi\ln\frac{1}{f(z)}+c$, donde $f(z)=\frac{1-cn\left(\frac{K}{a}z, k\right)}{sn\left(\frac{K}{a}z, k\right)}$

y k se determina de la ecuación $\frac{K'}{K}=\frac{b}{a}$ (véase el problema 1268).

1351. $w=2qi\ln\frac{1}{f(z)}+c$, donde $f(z)=\frac{\vartheta_1\left(\frac{z-z_0}{4a}\right)\vartheta_1\left(\frac{z-z_3}{4a}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{z-z_1}{4a}\right)\vartheta_1\left(\frac{z-z_2}{4a}\right)}$ y $\omega=2a$, $\omega'=2ib$, $z_1=(4a-x_0)+iy_0$, $z_2=(4a-x_0)+i(4b-y_0)$, $z_3=x_0+i(4b-y_0)$.

1352. $w=\frac{pi}{z-a}+\frac{p^*i}{z-a^*}+c\left(a\neq 0,\ a^*=\frac{R^2}{\bar a},\ p^*=\frac{R^2\bar p}{\bar a^2}\right)$, $w=$ $=\frac{pi}{z}-\frac{\bar p i}{R^2}z+c\,(a=0)$, c es un número real. Compárese con el problema 1294, 2). 1353. $w=\frac{pi}{z-a}+\frac{p^*i}{z-a^*}+c\left(a\neq\infty,\ a^*=\frac{R^2}{\bar a},\ p^*=\frac{R^2}{\bar a^2}\bar p\right)$, $w=\frac{pi}{z}-\frac{\bar p i}{R^2}z+$ $+c\,(a=\infty)$. Véase el problema 1296, 2). 1354. $w=\rho\,(z\cos\alpha+$ $+i\operatorname{sen}\alpha\sqrt{z^2-R^2})+\text{const}$. 1355. $w=\frac{\rho}{a-b}[(az-b\sqrt{z^2-c^2})\cos\alpha-$ $-i(bz-a\sqrt{z^2-c^2})\operatorname{sen}\alpha]+\text{const}$, donde $c^2=a^2-b^2$. 1356. $w=$ $=\frac{2K\rho}{a\operatorname{sn}u}(\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha\operatorname{cn}u)$, donde $u=\frac{K}{a}z$ y $\frac{K'}{K}=\frac{b}{a}$ (véase el problema 1350). *1357. 1) Si $pi=\rho e^{i\alpha}$, se tiene*

$$f(z)=\rho t'(a)\left\{\left[\frac{1}{t(z)}+t(z)\right]\cos\alpha+i\left[\frac{1}{t(z)}-t(z)\right]\operatorname{sen}\alpha\right\}+c;$$

$$2)\ f(z)=pit(z)-\frac{R^2\bar p i}{t(z)}+c=\rho\left\{\left[t(z)+\frac{R^2}{t(z)}\right]\cos\alpha+i\left[t(z)-\frac{R^2}{t(z)}\right]\operatorname{sen}\alpha\right\}+c,$$

donde $pi=\rho e^{i\alpha}$. Las funciones que figuran entre los corchetes realizan transformaciones conformes normadas de D en el exterior de un segmento horizontal y, respectivamente, vertical[1].

1358. $w=\sum_{k=1}^{n}2q_k i\ln\frac{1}{f(z,a_k)}+if'(a,a)\left[\frac{p}{f(z,a)}-\bar p f(z,a)\right]+c$, donde $f(z,a_k)$ y $f(z,a)$ *transforman conformemente D en el círculo unidad con la* normalización $f(a_k,a_k)=f(a,a)=0$, $f'(a,a)>0$ y c es un número real.

$$1360.\quad v(z,a)=\begin{cases}-\ln\frac{1}{|z-\bar a|}, & \text{si } \operatorname{Im} z\geqslant 0,\\ -\ln\frac{1}{|z-a|}, & \text{si } \operatorname{Im} z\leqslant 0;\end{cases}$$

$\rho(x,a)=-\frac{1}{\pi}\frac{\beta}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,(a=\alpha+i\beta)$. 1361. 1) En el interior del círculo se tiene

$$v(z,a)=\ln\frac{|R^2-\bar a z|}{R}=\begin{cases}-\left[\ln\frac{1}{\left|z-\frac{R^2}{\bar a}\right|}+\ln\frac{|a|}{R}\right], & \text{si } a\neq 0,\\ \ln R, & \text{si } a=0.\end{cases}$$

[1] Véase el complemento de *M. Schiffer* al libro: *R. Courant*, Dirichlet's Principle, Conformal Mappings and Minimal Surfaces, Interscience Publ., New York, 1950, § 1, n° 2.

En el exterior del circulo se tiene $v(z, a) = -\ln \frac{1}{|z-a|}$. La intensidad

$$\rho(Re^{i\theta}, a) = -\frac{1}{2\pi R} \frac{R^2 - |a|^2}{R^2 - 2R|a|\cos(\theta-\alpha) + |a|^2} \quad (a = |a| e^{i\alpha}).$$

En particular, para $a=0$ tiene un valor constante $-\frac{1}{2\pi R}$ y crea un potencial de distribución que tiene el valor constante $\ln R$ en el interior del circulo y es igual a $\ln |z|$ en el exterior del circulo.

2)
$$v(z, a) = \begin{cases} \ln \frac{|R^2 - \bar{a}z|}{R}, & a \neq \infty, \quad |z| \geqslant R, \\ -\ln \frac{1}{|z-a|}, & a \neq \infty, \quad |z| \leqslant R; \end{cases}$$

$$v(z, \infty) = \begin{cases} \ln |z|, \text{ si } |z| \geqslant R, \\ \ln R, \text{ si } |z| \leqslant R; \end{cases}$$

$$\rho(Re^{i\theta}, a) = -\frac{1}{2\pi R} \frac{|a|^2 - R^2}{R^2 - 2R|a|\cos(\theta-\alpha) + |a|^2} \quad (a = |a| e^{i\alpha} \text{ y } a \neq \infty).$$

Si $a = \infty$, se induce el mismo potencial que en el caso anterior para $a=0$. **1362.** $v(z, \infty) = \ln \frac{|z + \sqrt{z^2 - R^2}|}{2}$, $\quad \rho(x, \infty) = -\frac{1}{2\pi\sqrt{R^2 - x^2}}$ $(|x| < R)$.

1363. $v(z, \infty) = \ln \frac{|z + \sqrt{z^2 - c^2}|}{2}$ en el exterior de la elipse y $v(z, \infty) = -\ln 2(\alpha - \beta)$ en el interior de la elipse. La intensidad es $\rho(z, \infty) = -\frac{1}{2\pi\sqrt{|\zeta^2 - c^2|}}$ (ζ se encuentra sobre la elipse, $c^2 = \alpha^2 - \beta^2$). **1364.** $\rho(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial g(\zeta, \infty)}{\partial n}$. **1365.** $\rho(\zeta) = \frac{1}{2\pi R}$. **1366.** $\rho(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{R^2 - x^2}}$ $(|x| < R)$.
1367. $\rho(\zeta) = \frac{1}{2\pi\sqrt{|\zeta^2 - c^2|}}$ $(c^2 = a^2 - b^2)$. **1368.** R. **1369.** $\frac{1}{2R}$. **1370.** $\frac{1}{2(a-b)}$.
1371. a. **1374.** Si $\omega(z; \Delta)$ es la medida armónica del intervalo Δ del eje real en el punto z respecto al semiplano superior, es decir, $\omega(z; \Delta) = \frac{1}{\pi} \int_\Delta \frac{\partial}{\partial n} \ln \times$ $\times \frac{1}{|t-z|} dt$ (véanse los problemas 1065 y 1373), se tiene (omitiendo la constante real aditiva): 1) $w = \frac{\varphi}{\pi} \ln(z-a)$, $v = \varphi\omega(z; \Delta)$, $\Delta = (-\infty, a)$; 2) $w = \frac{\varphi}{\pi} \ln \frac{z-b}{z-a}$, $v = \varphi\omega(z; \Delta)$, $\Delta = (a, b)$; 3) $w = \frac{1}{\pi}\left[\varphi_1 \ln(z-a_1) + \varphi_2 \ln \frac{z-a_2}{z-a_1} + \ldots + \varphi_n \ln \frac{z-a_n}{z-a_{n-1}}\right]$, $v = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k \omega(z; \Delta_k)$, $\Delta_k = (a_{k-1}, a_k)$, $a_{-1} = -\infty$;
4) w y v se obtienen de las expresiones, indicadas en la respuesta al punto 3), sustituyendo φ_k por $\varphi_k - \varphi_0$ y agregando $i\varphi_0$ a w y φ_0 a v. El potencial se puede representar también en la forma $\sum_{k=0}^{n} \varphi_k \omega(z; \Delta_k)$, $\Delta_0 = (a_n, \infty)$. **1375.** 1) $w(z) = \frac{id}{\ln \mu} \ln z + \text{const}$, $\quad v(z) = \frac{d}{\ln \mu} \ln r + \text{const}$, $\quad$ donde $\quad \mu = \frac{r_2}{r_1}$; $\quad$ 2) $w(z) =$

$= \frac{id}{\ln\mu}\ln t(z) + const,\ v(z) = \frac{d}{\ln\mu}\ln|t(z)| + const$, *donde* μ es el *módulo del recinto* D (véase la pág. 37) y $t(z)$ transforma conformemente D en un anillo circular. **1377.** $w(z)$ se determina mediante la fórmula indicada en el texto del problema **1376**, donde:

1) $t(z) = \sqrt{\mu}\,\frac{z-\sqrt{a^2-R^2}}{z+\sqrt{a^2-R^2}},\quad \mu = \frac{a}{R} + \sqrt{\left(\frac{a}{R}\right)^2 - 1}$;

2) y 3) $t(z) = \sqrt{\mu}\,\frac{z-x_1}{z-x_2},\quad \mu = \left(\frac{R-x_1}{R-x_2}\right)^2$,

donde x_1 y x_2 se determinan de la ecuación $x^2 + \frac{r^2-R^2-a^2}{a}x + R^2 = 0\ (x_1 < x_2)$;

4) $t(z) = \frac{1}{c}(z + \sqrt{z^2-c^2}),\quad \mu = \frac{a+b}{c},\quad c = \sqrt{a^2-b^2}$;

5) $t = e^{\pi\frac{K+u}{K'}},\ z = \operatorname{sn}(u, k),\ \mu = e^{2\pi\frac{K}{K'}}$ ($|\operatorname{Re} u| < K$, $|\operatorname{Im} u| \leqslant K'$ (véase el problema **1267**, 1));

6) $t = e^{\pi\frac{K+u}{K'}},\quad z = \frac{2Kh}{\pi}\left[Z(u) + \frac{\operatorname{dn} u \operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u}\right],\quad \mu = e^{2\pi\frac{K}{K'}}$, donde k se determina de las ecuaciones $KZ(\mu) = \frac{\pi h}{2a}$, $\operatorname{dn}^2\beta = \frac{E}{K}$ (véase el problema **1267**, 15)).

1379. 1) $\omega_1(z) = 1 - \frac{\ln|z|}{\ln\mu},\ \omega_2(z) = \frac{\ln|z|}{\ln\mu}$;

$$\rho_1(\zeta) = -\rho_2(\zeta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi\mu\ln\mu} \text{ sobre } |z| = 1, \\ -\frac{1}{2\pi\mu\ln\mu} \text{ sobre } |z| = \mu; \end{cases} \qquad p_{11} = p_{22} = -p_{12} = -p_{21} = \frac{1}{\ln\mu};$$

2) $\omega_1(z) = 1 - \omega_2(z),\ \omega_2(z) = \frac{\ln|t(z)|}{\ln\mu}$;

$$\rho_1(\zeta) = -\rho_2(\zeta) = \begin{cases} \left|\frac{t'(\zeta)}{t(\zeta)}\right|\frac{1}{\ln\mu} \text{ sobre } \Gamma_1 \\ -\left|\frac{t'(\zeta)}{t(\zeta)}\right|\frac{1}{\ln\mu} \text{ sobre } \Gamma_2; \end{cases} \qquad p_{11} = p_{22} = -p_{12} = -p_{21} = \frac{1}{\ln\mu},$$

donde $t(z)$ transforma conformemente D en el anillo $1 < |t| < \mu$, de modo que el contorno Γ_1 se transforma en la circunferencia $|t| = 1$. **1381.** $v(z) = \operatorname{Im} f(z) - \sum_{k=1}^{n}\alpha_k\omega_k(z)$, donde $f(z)$ transforma conformemente D en el plano con cortes horizontales, con la particularidad de que

$$f(z) = \begin{cases} \frac{pi}{z-a} + \dots, \text{ si } a \neq \infty, \\ piz + \dots, \text{ si } a = \infty. \end{cases}$$

1382. $v(z) = 2qg(z, a) + \sum_{k=1}^{n}\alpha_k\omega_k(z),\ \omega_k(z) = -\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_k}\frac{\partial g(\zeta, z)}{\partial n}ds.$

1383. Si $f(a) = \infty$, el campo está formado por el dobiete $(a; p)$, donde p se determina del desarrollo de $f(z)$ en una vecindad del punto a:

$$f(z) = \begin{cases} \frac{pi}{z-a} + \dots, \text{ si } a \neq \infty, \\ piz + \dots, \text{ si } a = \infty. \end{cases}$$

1384. 1) Si $f(a)=0$ y $f(b)=\infty$, el campo está formado por cargas puntuales $(a;\ 2q)$, $(b;\ -2q)$ y el flujo del vector intensidad a través de cada contorno frontera es igual a cero; 2) si $f(a)=0$, el campo está formado por una carga puntual $(a;\ 2q)$ y el flujo del vector intensidad a través del contorno frontera, correspondiente a la circunferencia, en dirección de la normal exterior para el recinto D es igual a $4\pi q$ y a través de cada uno de los contornos restantes es igual a cero; 3) el campo es regular en todo punto. El flujo del vector intensidad a través de los contornos frontera, que se transforman en circunferencias, en la dirección de la normal exterior para D es igual a $\pm 4\pi q$ (el signo «+» corresponde al contorno que se transforma en la circunferencia exterior) y a través de cada uno de los restantes contornos es igual a cero. **1385.** Véanse los problemas 1332 y 1334. **1386.** 1) $v(z)=\sum\limits_{k=1}^{n-1}\alpha_k\omega_k(z)+c$, donde α_k se determinan unívocamente del sistema

$$\sum_{k=1}^{n-1} p_{ik}\alpha_k=2q_i\ (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$$

(véase el problema 1077) y c es un número real arbitrario. El problema equivale a la construcción en D de una corriente que circunda los contornos frontera Γ_k con las circulaciones $4\pi q_k$ $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, si $\infty\in D$, y con las circulaciones $4\pi q_k$ $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$ y $-4\pi q_n$, si $\infty\ \overline{\in}\ D$ (Γ_n es el contorno exterior). 2) $v(z)=v_0(z)-2qg(z,\ a)$, donde $v_0(z)$ se determina, igual que en el punto 1), a través de las cargas distribuidas $2q_k+2q_k'$, donde $q_k'=-\dfrac{q}{2\pi}\displaystyle\int_{\Gamma_k}\frac{\partial g(\varsigma,\ a)}{\partial n}\,ds$.

1387. $v(z)=2q_1\ln\dfrac{r_2}{|z|}+c$, si $q=0$ y $v(z)=2(q_1-\lambda q)\ln\dfrac{r_2}{|z|}-2qg(z,\ a)+c$, donde

$$\lambda=\frac{\ln a}{\ln\rho},\qquad g(z,\ a)=|z|^{\lambda}\ln\left|\frac{\vartheta_1\left(\dfrac{\ln z+\ln a}{2\pi i}\right)}{\vartheta_1\left(\dfrac{\ln z-\ln a}{2\pi i}\right)}\right|$$

para $\tau=\dfrac{\ln\rho}{\pi i}$, siendo $\rho<a<1$, si $q\neq 0$ (en las denotaciones del problema 1334 la función de Green es $g(z,\ a)=\operatorname{Im}\Phi\left(\dfrac{\omega}{\pi i}\ln z\right)$ para $\Gamma=2\pi$ y $\Gamma_2=-2\pi$; lo último se obtiene de la condición $\psi=0$ en la frontera del anillo). **1388.** El manantial $(a;\ q)$ se transforma en el manantial $(a^*;\ -q)$, donde a^* es el punto simétrico de a. Además,

$$u=\frac{q}{2\pi}\ln\frac{1}{|f(z,\ a)|}+c,$$

donde $f(z,\ a)$ transforma conformemente el recinto D en el círculo unidad (aquí y en lo sucesivo el coeficiente de conducción térmica k se toma igual a 1).

1389. $u=\dfrac{q}{2\pi}\ln\left|\dfrac{z-\bar a}{z-a}\right|+c$. **1390.** $u=\dfrac{q}{2\pi}\ln\left|\dfrac{R^2-\bar a z}{R(z-a)}\right|+c$. **1391.** $u=\dfrac{q}{2\pi}\ln\left|\dfrac{\operatorname{sen}\dfrac{\pi z}{2a}+i\operatorname{sh}\dfrac{\pi h}{2a}}{\operatorname{sen}\dfrac{\pi z}{2a}-i\operatorname{sh}\dfrac{\pi h}{2a}}\right|+c$. **1392.** $u=\dfrac{q}{2k}\ln\left|\dfrac{t+\dfrac{i}{\sqrt{k}}}{t-\dfrac{i}{\sqrt{k}}}\right|+c$. $t=\operatorname{sn}\left[\dfrac{K}{a}(z+ib),\ u\right]$, donde k se determina de la relación $\dfrac{K'}{K}=\dfrac{2b}{a}$. **1393.** 1) La

función de Green $g(z, a)$ del recinto D puede considerarse como la temperatura creada en D por el manantial térmico $(a; 2\pi)$, cuando la temperatura en la frontera es igual a cero; 2) $u(z)=\frac{q}{2\pi}g(z, a)+\sum_{k=1}^{n} u_k\omega_k(z)$, donde $\omega_k(z)$ es la medida armónica de Γ_k.

1394. $u=\frac{q}{2\pi}g(z, a)+\frac{u_2-u_1}{\ln\frac{r_2}{r_1}}\ln\frac{|z|}{r_1}+u_1$, donde $g(z, a)$ es la función de Green (véase la respuesta al problema 1387).

Capítulo XI

1397. 1) y 2) $A=\frac{1}{2}[(a_1+b_2)+i(a_2-b_1)]$, $B=\frac{1}{2}[(a_1-b_2)+i(a_2+b_1)]$,

$$C=c_1+ic_2;\quad A_1=\frac{1}{2\Delta}[(a_1+b_2)+i(b_1-a_2)],$$

$$B_1=\frac{1}{2\Delta}[(b_2-a_1)-i(a_2+b_1)],$$

$$C_1=\frac{i}{\Delta}[(c_2b_1-c_1b_2)+i(c_1a_2-c_2a_1)].$$

4) La transformación (2) se reduce a la proyección de los z-puntos sobre la recta $w=\mu e^{i\frac{\beta-\alpha}{2}}$ $(-\infty<\mu<\infty)$, a un giro alrededor del origen en ángulo β

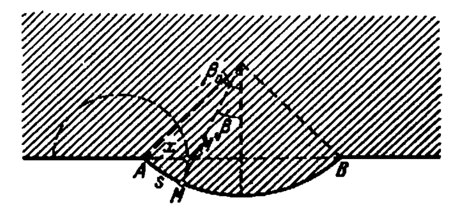


FIG. 137

y a una transformación de semejanza de coeficiente $|A|$. En este caso, todo el z-plano se transforma en la recta $w=\lambda e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$ $(-\infty<\lambda<\infty)$. 1407. Se puede construir la transformación casiconforme necesaria de característica $p\leqslant\frac{R+|a|}{R-|a|}$.

1408. $u=\frac{x}{\cos\alpha}$, $v=y-x\operatorname{tg}\alpha$, $p=\frac{1+\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$. 1409. *Solución*. Mediante la función $\zeta=\ln\frac{z-a}{z-b}$ (los valores $z=a$ y $z=b$ corresponden a los puntos A y B) transformamos conformemente el biángulo dado en una franja de anchura $\pi+\beta_0$. Comprimimos esta franja hasta obtener una franja de anchura π (una

transformación casiconforme de característica $p=1+\frac{\beta_0}{\pi}\Big)$ y, empleando la función inversa $z(\zeta)$, transformamos esta última franja en una franja de anchura π. Por otra parte, el arco AM (fig. 137) de longitud s ocupará la posición del segmento AM' de longitud x; el punto M se desplaza por una circunferencia de Apolonio respecto a los puntos A y B (se indica mediante una linea punteada) y además

$$\frac{dx}{ds}=\frac{\cos^2\frac{\beta_0}{2}}{\cos^2\frac{\beta}{2}}\geqslant\cos^2\frac{\beta_0}{2}$$

(¡demuestre esto!). En el semiplano obtenido dilatamos la semifranja vertical que se apoya en el segmento AB hasta obtener la longitud del arco $\overset{\frown}{AB}$ y de manera que se conserven las longitudes a lo largo del arco $\overset{\frown}{AB}$. La transformación casiconforme resultante es de característica

$$p\leqslant\left(1+\frac{\beta_0}{\pi}\right)\sec^2\frac{\beta_0}{2}.$$

1411. $A=\frac{1}{4}[(a-d)+i(c+b)]$, $B=\frac{1}{4}[(a+d)+i(c-b)]$, $F=\frac{1}{2}(f+ig)$.

1412. $b=q_2(z)\bar{a}$ ó $b=\frac{1}{\overline{q_2(z)}}\bar{a}$. En particular, se puede tomar $w=\omega+q_2(z)\bar{\omega}$. La transformación $w=a\omega+b\bar{\omega}$ es no degenerada, si $|q_2(z)|\neq 1$.

1413. $b=\lambda\bar{a}$, donde λ se determina de la ecuación $\bar{q}_2\lambda^2-\lambda(1+|\bar{q}_2|^2-|q_1|^2)+q_2=0$ o bien $(\lambda-q_2)\left(\frac{1}{\lambda}-\bar{q}_2\right)=|q_1|^2$. La transformación es no degenerada, si $|q_1|+|q_2|<1$ ó $||q_1|-|q_2||>1$.

1414. Los términos superiores de la ecuación del problema determinan una transformación casiconforme de dos pares de características (p,θ), (p_1,θ_1), que dependen de $q_1(z)$ y $q_2(z)$. *La transformación* $\zeta(z)$ *es una transformación casiconforme de un par de características* p,θ; $q_1^*=-\frac{p-1}{p+1}e^{2i\theta}$, $q_2^*-\frac{p_1-1}{p_1+1}e^{2i\theta_1}$, (véanse los problemas 1401 y 1403).

1422. $F(z)=-2z\ln\ln\frac{1}{r}+2z\ln\ln\frac{1}{R}$;

$$\frac{\partial F}{\partial x}=-2\ln\ln\frac{1}{r}-2\frac{e^{i\varphi}\cos\varphi}{\ln r}+2\ln\ln\frac{1}{R};$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=-2i\ln\ln\frac{1}{r}-2\frac{e^{i\varphi}\operatorname{sen}\varphi}{\ln r}+2i\ln\ln\frac{1}{R}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=-2\ln\ln\frac{1}{r}-\ln\frac{1}{r}+2\ln\ln\frac{1}{R},$$

$$\frac{\partial F}{\partial\bar{z}}=\varphi(z)=\frac{e^{2i\varphi}}{\ln\frac{1}{r}}.$$

LA EDITORIAL MIR PUBLICA

V. Mijailov

ECUACIONES DIFERENCIALES EN DERIVADAS PARCIALES

Este libro representa en sí un curso universitario de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Recurriendo a los problemas de contorno para las ecuaciones elípticas de segundo orden y al problema de Cauchi, así como a los principales problemas mixtos para las ecuaciones hiperbólicas y parabólicas de segundo orden, el autor expone en su libro los métodos modernos de exploración de los problemas correspondientes. Estos métodos, basados sobre el concepto de soluciones generalizadas, permiten tratar las ecuaciones con coeficientes variables de la misma manera que se emplea para el estudio de las ecuaciones más simples, esto es, la ecuación de Poisson, la de onda y la ecuación de conducción de calor. A la par con las cuestiones de existencia y unicidad y la exploración de las propiedades cualitativas de los problemas de contorno, en el libro se presta gran atención a los métodos aproximados de resolución de éstos.

La exposición se acompaña de un gran número de problemas destinados, principalmente, para profundizar y ampliar el contenido del libro. Con el mismo objetivo se dan las listas de la literatura adicional.